Организация проектной и исследовательской деятельности обучающихся на уроках и во внеурочное время с использованием УМК издательства «Просвещение»

А.В. Шевкин, Москва, avshevkin@mail.ru

Как опытный учитель, за плечами которого 44 года работы у доски, я понимаю, какое пагубное влияние на подрастающее поколение, на будущее страны, на результативность обучения в школе оказывают некоторые «новшества», внедрённые и ещё только внедряемые в процессе «реформирования» образования. Главный их «недостаток» — они теоретически не обоснованы и экспериментально не проверены.

По-другому и быть не может, так как «реформа» образования направлена на слом прежней системы образования, главный «недостаток» которой был в воспитании человека-творца, коллективиста, который должен был «прежде думать о Родине, а потом о себе». Такой принципиальный слом старой системы образования уже случался. Однако ничего дельного из отказа от опыта предыдущей эпохи тогда не получилось. Сделаем небольшой исторический экскурс для лучшего понимания происходящего сейчас.

В 20-е годы прошлого столетия новая российская (потом советская) школа долго искала своё лицо. По стране гремел метод проектов. Почитаем тех, кто специально изучал этот вопрос.

Пеньковских Е. А. [1] пишет: «Родившись на американской почве, метод проектов со второй половины 20-х годов XX века стал приобретать все больше сторонников в Советском Союзе и нашёл применение в практической деятельности школ… Под методом проектов понимали метод, комплексно реализующий ряд принципов: самодеятельность, сотрудничество детей и взрослых, учёт возрастных и индивидуальных особенностей детей, деятельностный подход, актуализация субъектной позиции ребёнка в педагогическом процессе, взаимосвязь педагогического процесса с окружающей средой... В журнале «На путях к новой школе» определяли метод проектов как "выполнение учащимися определенной учебно-производственной задачи, взятой для социалистического строительства общественно-политической, хозяйственно-производственной и культурно-бытовой сферы"».

В работе по методу проектов выделяли «шесть этапов:

− Создание у детей стимула к работе и осуществление выбора проекта.

− Составление предварительного общего плана работы.

− Подготовка к выполнению проекта.

− Составление детального плана.

– Выполнение проекта.
– Учет проекта...

На первом этапе осуществлялся выбор проекта из ранее изученного материала или предшествующего проекта. Исходным моментом могло служить чтение газет, просмотр фильма, рассмотрение картины, яркий рассказ, доклад на детском собрании. Дети имели право предлагать свои проекты в пределах задания. Учитель обсуждал с детьми, какой проект более целесообразно выбрать, исходя из общего значения, посильности и наличия благоприятных условий его осуществления».

Неправда ли, в прочитанном много общего с тем, что происходит с «методом проектов» в настоящее время. Однако тогда очень скоро стала раздаваться критика: «Применяя в Советской России новые различные методы обучения, могущие способствовать воспитанию инициативы и деятельных участников социального строительства, необходимо развернуть решительную борьбу против легкомысленного методического прожектерства, насаждения в массовом масштабе методов, предварительно на практике не проверенных, что особо ярко в последнее время обнаружено в применении так называемого "метода проектов"».[1]

Читаем дальше у Пеньковских Е. А.: «Попытаемся выявить те причины, по которым этот метод не был оценен советскими учителями. На наш взгляд, недостаточно уделялось внимания теоретической разработке метода проектов, была дана недостаточно чёткая его характеристика, что позволило проявлять каждому учителю своё «творчество» в ведении уроков или занятий по данному методу. Не существовало единых требований, не обосновывалась типология и организация форм работы. С другой стороны, не каждый учитель понимал, почему он должен работать именно по этому методу, а учащиеся не понимали, что от них требовалось. Все эти факторы послужили снижению уровня знаний. Применение метода проектов в школе было прервано постановлением ЦК ВКП (б) от 25.8.1932 «Об учебных программах и режиме в начальной и средней школе» [1].

Итак, «метода проектов» был признан непригодным для социалистического строительства, для обеспечения выученными кадрами строящихся заводов, пополнения рядов учителей, преподавателей, учёных в разных отраслях науки. Руководство партии и правительства того времени приняли не самое приятное в идеологическом плане решение — вернуться к обруганному с идеологических позиций гимназическому образованию царской России, к учебникам той поры.

[1] Источник указан в статье [1].

Результат отказа от дальнейших поисков «новой школы» и возвращение к проверенному десятилетиями опыту известен.
В короткий срок советская школа оказалась способной в условиях изоляции в мире обеспечивать страну подготовленными кадрами, воспитать защитников отечества, переломивших хребет фашизму.

Не кажется ли вам, что наша новая российская школа находится в поисках своей новой идентичности. Руководители образования у нас спят и видят, как бы увести новую российскую школу от старой советской. Как и в 30-е годы прошлого века, мы видим, что эти поиски пока не приносят успеха, подготовка учащихся стремительно падает, а нововведения порой вызывают отторжение учителей. Не надо быть пророком, чтобы предсказать, что, как и много лет назад, российская школа вернётся к нормальным целям обучения, к нормальным программам, нормальным учебникам. Ведь если этого не произойдёт, то нас ожидает катастрофа.

Надо ожидать, что современные партия и правительство обратят внимание на повсеместные провалы в образовании, создающие кадровые проблемы. Уже есть первый звоночек, он, правда, не относится к «методу проектов», который мы здесь обсуждаем. При вступлении в должность новый министр образования Ольга Васильева успела сказать только две вещи, которые были всеми замечены:

1) об учителе надо заботиться,
2) труд учителя — это служение, а не оказание услуги.

Позднее появились указания по доработке стандарта начальной школы в части воспитания. Надеюсь, что это только начало. Кстати, в одном европейском источнике я встретил такой перечень образовательных услуг: …, обучение детей, дрессировка животных, … — именно так, в одном ряду. Но это их западный подход!

Давайте поищем в Интернете что-нибудь про исследовательскую деятельность учащихся.

«Исследовательская деятельность – это образовательная работа, связанная с решением учащимися творческой, исследовательской задачи (в различных областях науки) и предполагающая наличие основных этапов, характерных для научного исследования, а также таких элементов, как практическая методика исследования выбранного явления, собственный экспериментальный материал, анализ собственных данных и вытекающие из него выводы.

В исследовательскую деятельность следует включать максимально возможное число учащихся. При этом приёмам исследовательской деятельности следует специально обучать юного исследователя.

Приобщать к методам научного познания. Среди методов научного познания, наиболее часто используемых в ученической научно-исследовательской деятельности, различают методы получения нового знания и методы его организации. При этом изменение деятельности педагога заключается во включении в учебный план исследовательской и проектной деятельности школьников (через факультативы, элективные курсы и др.)».[2]

Короче говоря, проект — это исследование, а деятельность, выполняемая при реализации проекта — исследовательская деятельность.

Примеры удачного проведения исследовательской деятельности учащихся я наблюдал в своей физматшколе 2007 г. Москвы в течение ряда лет. Особенно плодотворно это получается у Д.В. Прокопенко. Сильные учащиеся 9-11 классов, претендующие на «5» в году, после обсуждения со своим весьма эрудированным учителем (это обязательно надо особо подчеркнуть!) выбирают тему исследования, над которой будут работать в течение года и защищать её во время устного экзамена по геометрии (оценка за защиту исследования является оценкой за экзамен при условии, что в полугодиях стоят отметки «5»).

Об этой кропотливой работе надо бы просить рассказать Дмитрия Викторовича, который вызывает моё искреннее восхищение его умением поставить перед учеником проблему — почти всегда существенно выходящую за рамки программы по геометрии физматкласса, решив которую ученик получает серию фактов и методов, которые оказываются полезными для решения задач олимпиад самого высокого уровня. Как вы поняли, здесь не ставится задача вовлечь в исследовательскую деятельность как можно больше учащихся.

Это, быть может, предельный опыт, который я даже не брался повторить, так как этого не позволяли мои домашние возможности и работа над созданием дидактического и методического обеспечения учебников. Далее я расскажу о моём личном опыте более близком к реалиям обычной школы. Он описан в предметном журнале и на сайте **www.shevkin.ru**. Наша с пятиклассниками работа над проектом «Поиск решений головоломки ПЕНТАМИНО» стала первым из десяти сюжетов, описанных в книжке «Математика — это интересно!» [3], которую я составил из материалов работы с двумя группами учащихся 5-6 классов за два года работы. Учитывая, что история доступна в Интернете, ограничусь лишь описанием основной канвы сюжета. Подробности вы сможете отыскать самостоятельно.

5-6 классы. Началось всё в далёком 1983 г. Мой ученик Игорь Пак (теперь он профессор математики в США) подарил мне головоломку, которой в тот момент была увлечена их семья. Я тоже увлёкся, нашёл несколько решений и все их зарисовал. Даже придумал алгоритм перебора всех решений для получения полного списка, но он слишком сложен для ручного перебора. Изучив литературу, выяснил, что всего существует 2339 решений. Результат был опубликован С. Голомбом в 60-е годы прошлого века. Сразу бросалось в глаза, что иногда из найденного решения можно получить новое, используя симметрии.

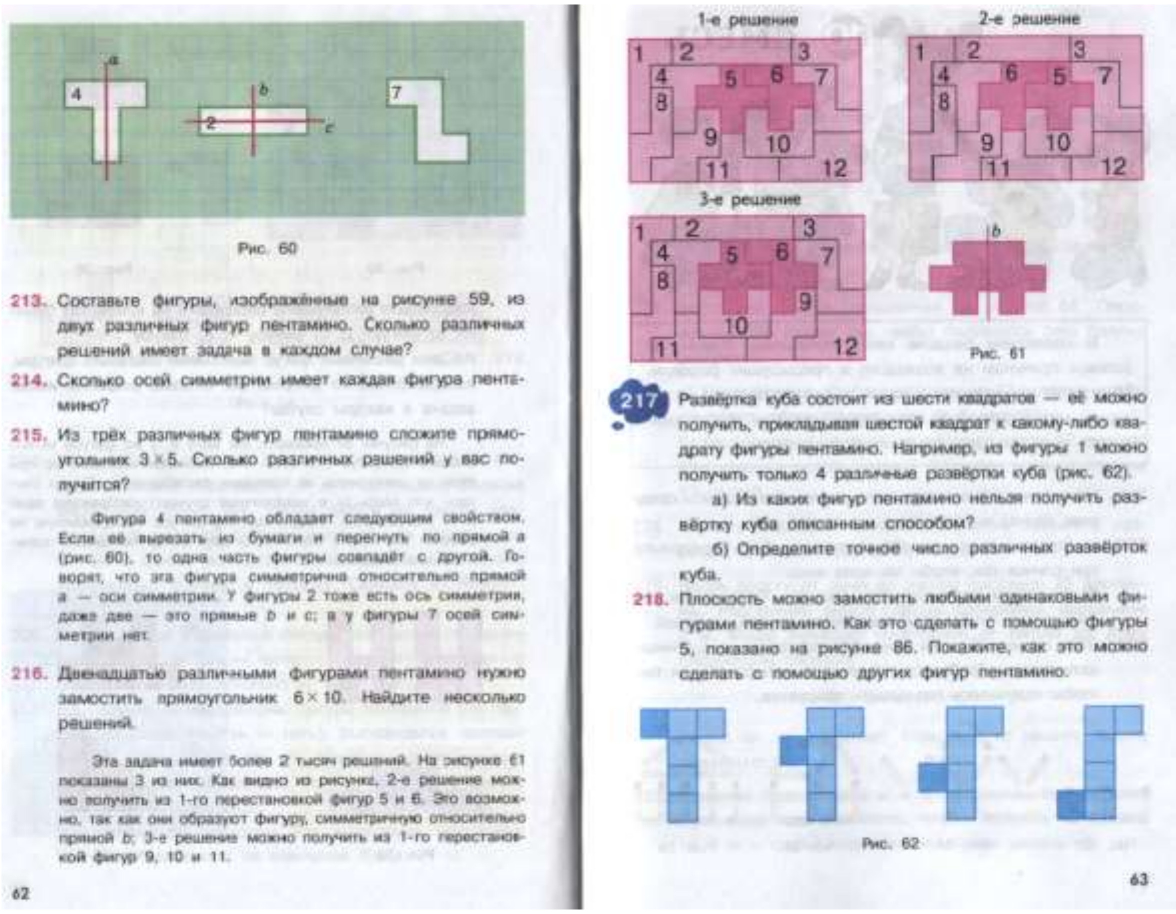


Рис. 60

213. Составьте фигуры, изображённые на рисунке 59, из двух различных фигур пентамино. Сколько различных решений имеет задача в каждом случае?

214. Сколько осей симметрии имеет каждая фигура пентамино?

215. Из трёх различных фигур пентамино сложите прямоугольник 3 × 5. Сколько различных решений у вас получится?

Фигура 4 пентамино обладает следующим свойством. Если её вырезать из бумаги и перегнуть по прямой *a* (рис. 60), то одна часть фигуры совпадёт с другой. Говорят, что эта фигура симметрична относительно прямой *a* — оси симметрии. У фигуры 2 тоже есть ось симметрии, даже две — это прямые *b* и *c*; а у фигуры 7 осей симметрии нет.

216. Двенадцатью различными фигурами пентамино нужно замостить прямоугольник 6 × 10. Найдите несколько решений.

Эта задача имеет более 2 тысяч решений. На рисунке 61 показаны 3 из них. Как видно из рисунка, 2-е решение можно получить из 1-го перестановкой фигур 5 и 6. Это возможно, так как они образуют фигуру, симметричную относительно прямой *b*; 3-е решение можно получить из 1-го перестановкой фигур 9, 10 и 11.

62

Рис. 61

217. Развёртка куба состоит из шести квадратов — её можно получить, прикладывая шестой квадрат к какому-либо квадрату фигуры пентамино. Например, из фигуры 1 можно получить только 4 различные развёртки куба (рис. 62).

а) Из каких фигур пентамино нельзя получить развёртку куба описанным способом?

б) Определите точное число различных развёрток куба.

218. Плоскость можно замостить любыми одинаковыми фигурами пентамино. Как это сделать с помощью фигуры 5, показано на рисунке 86. Покажите, как это можно сделать с помощью других фигур пентамино.

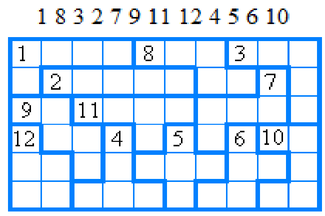
Рис. 62

63

Эту идею я включил в нашу совместную с И.Ф. Шарыгиным книгу «Задачи на смекалку», теперь она входит в УМК С.М. Никольского и др. выше приведены сканы двух страниц, посвящённых головоломке.

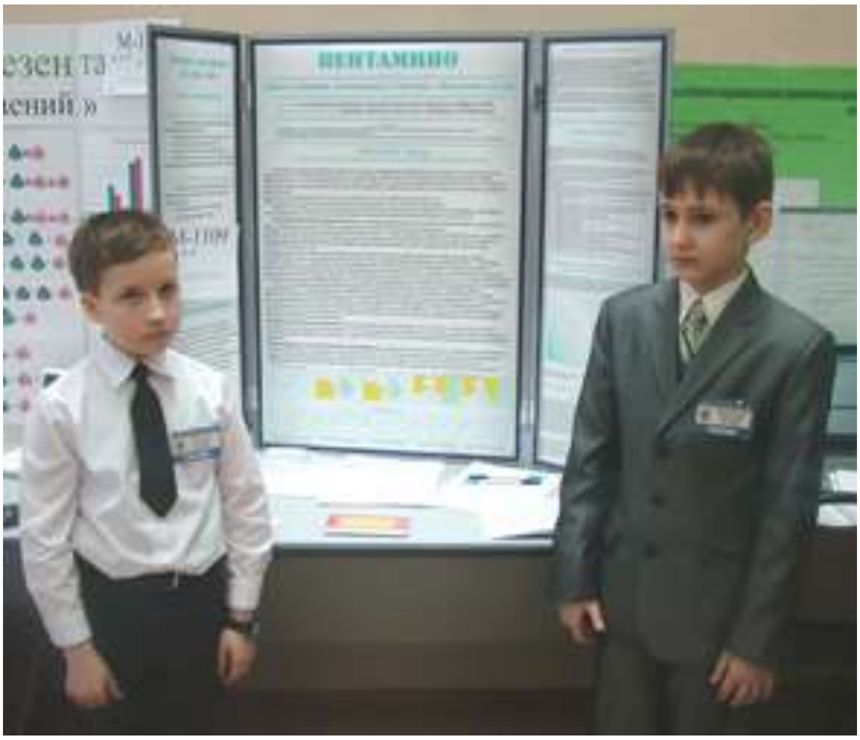
С тех пор прошли годы, с каждым новым классом я начинал работу с головоломкой, ребята и я сам находили несколько решений. Моя коллекция решений росла, а интерес у ребят каждый раз угасал также быстро, как и возникал. В 2011 г. мне дали две подгруппы очень шустрых пятиклассников. Работали мы по нашим учебникам, где самое начало про натуральные числа для этих ребят было слишком просто. Дополнительно я давал им задачи из «Смекалки», так мы добрались до показанных выше страниц, купили несколько комплектов головоломки — и началось! Среди первых новых решений были 5 решений симпатичной и умненькой девочки! Вот одно из первых решений, после которых «процесс пошёл».

Мальчишки взорвались, началось соревнование! Я рисовал решения, которые приносили ребята, в шутку ругая себя за проблему, которую себе создал, попутно получал свои новые решения — надо было не отставать от подопечных. Про классификацию решений и наш результат можно прочитать подробнее [3] и на моём сайте в разделе ШКОЛЫ, подведу итог. Уже после нового года завуч школы Чулков Павел Викторович спросил меня, а не хотите ли работу ребят представить, как исследовательский проект? Вы же фактически проводите исследование, осталось только оформить его как следует.



Ахмедова Е., 5б, ФМШ № 2007, 27.09.2011

В РУДН 7 апреля 2012 г. мои пятиклассники А. Кулямин и Д. Тертичный без сопровождения учителя и родителей защитили с дипломом первой степени стендовый доклад по теме «Поиск решений головоломки С. Голомба Пентамино 6х10» на «Ярмарке идей» — традиционном ежегодном конкурсе на Юго-Западе Москвы. Впечатления участников есть в книге и в Интернете. Привожу фотографию с обложки книги.



Все найденные решения приведены на сайте **www.shevkin.ru** (боковое меню). У меня есть ещё порядка 20 решений, но после перехода на Win10 потеряна техническая возможность помещать любые статьи, кроме новостей. Сайт будет реконструирован в ближайшие месяцы.

Вы заметили, что я не остановился на формальных процедурах — как и что надо планировать, выполнять, выдвигать гипотезу, проверять её достоверность. Это можно прочитать в указанных источниках и специальных книгах, которые существуют. [4]

Главная трудность, на мой взгляд, заключена не в формальных процедурах, а в поиске темы исследования — интересной и посильной учащимся. О выборе тем мы и поговорим дальше на примере учебников Издательства ПРОСВЕЩЕНИЕ, которые я знаю лучше других учебников.

Но сначала рассмотрим другой реальный случай, на основе которого можно интересно построить изучение вероятности. Это ещё один сюжет из книги [3].

Шестиклассник Юнусов Тимур принёс задачу

У пирата 8 шестизарядных револьверов. Пять из них он зарядил одним патроном, крутанул барабан каждого заряженного револьвера так, что нельзя понять, каким по счёту будет выстрел из этого револьвера. Остальные револьверы остались незаряженными. Из восьми револьверов выбрал три случайным образом. Пират хочет нажать на курок каждого из них по одному разу. Определите вероятность того, что он услышит хотя бы один выстрел.

Тимур спросил: «А как решают задачи такого типа?»

Признаюсь, вопрос поставил меня в тупик, так как ничего подобного мне до той поры решать не приходилось. Задача оказалась хорошим поводом для того, чтобы решить несколько подготовительных к ней и даже совсем не связанных с ней задач на вычисление вероятностей событий. Так родилась серия «пятёрочек» задач на вероятность для шестиклассников. «Пятёрочки» задач — ещё один сюжет из книги [3]. Это недельное домашнее задание, которое выдавалось ученикам, оценивалось только правильные решения, все решения разбираются с классом. Методика работы с «пятёрочками» задач описана в той же книге [3] и на том же на сайте **www.shevkin.ru**.

Мы начали с определения вероятности события, изученного в 5 классе, повторили решения задач на вероятность для одного, двух кубиков и др. Для решения нашей задачи и большей наглядности револьверы заменим рядами ящиков в шкафу и уменьшим число шкафов. Вот первая задача. Другие задачи с тем же сюжетом можно получить, увеличивая число шкафов, варьируя задаваемые вопросы.

1. В шкафу есть 3 вертикальных ряда по 6 ящиков в каждом. В один ящик в каждом ряду спрятали одну монету. Какова вероятность того, что человек, не знающий, куда спрятали монеты, выдвинув по одному ящику в каждом ряду, найдет:

а) все три монеты?

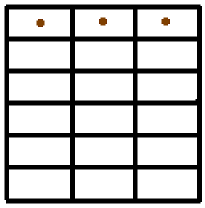
б) монеты в двух первых рядах и не найдет в третьем?

в) найдет ровно две монеты?

г) монету в первом ряду и не найдет в остальных?

д) ровно одну монету?

е) хотя бы одну монету?



Решение. На рисунке изображены три ряда ящиков в шкафу и один из возможных способов спрятать монеты (они отмечены точками). В каком ящике в каждом ряду спрятана монета, неизвестно, но как мы сейчас убедимся, это не так важно для проведения расчётов. Важно только одно обстоятельство: в каждом ряду ровно 1 ящик с монетой и 5ящиков без монет.

Имеется $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ способов выдвинуть по одному ящику в каждом из трёх рядов.

а) Из них имеется $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ способ найти все три монеты. Следовательно, вероятность найти все три монеты равна $\frac{1}{216}$.

б) Имеется $1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$ способов найти монеты в первом и втором ряду и не найти в третьем. Следовательно, вероятность найти монеты в двух первых рядах и не найти в третьем равна $\frac{5}{216}$.

в) Имеется $1 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 15$ способов найти ровно две монеты: или в первом и втором ряду, или в первом и третьем, или во втором и в третьем. Следовательно, вероятность найти ровно две монеты равна $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$.

г) Имеется $1 \cdot 5 \cdot 5 = 25$ способов найти монету в первом ряду и не найти в остальных. Следовательно, вероятность найти монету в первом ряду и не найти в остальных равна $\frac{25}{216}$.

д) Имеется $1 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 1 = 75$ способов найти ровно одну монету: или в первом ряду и не найти в остальных, или во втором ряду и не найти в остальных, или в третьем ряду и не найти в остальных. Следовательно, вероятность найти ровно одну монету равна $\frac{75}{216} = \frac{25}{72}$.

е) Найти хотя бы одну монету можно, найдя или 3 монеты, или ровно 2 монеты, или ровно 1 монету. Случаев, благоприятствующих этому событию, 1 + 15 + 75 = 91, следовательно, вероятность найти хотя бы одну монету равна $\frac{91}{216}$.

Ответ. а) $\frac{1}{216}$; б) $\frac{5}{216}$; в) $\frac{5}{72}$; г) $\frac{25}{216}$; д) $\frac{25}{72}$; е) $\frac{91}{216}$.

Через «пятёрочки» мы решили большой круг разнообразных задач, специально составленных для постепенного продвижения к результату.

2. Учитель запланировал проверить два домашних задания из шести. Эти два задания он выбирает случайным образом и за их невыполнение ставит в классный журнал отметку 1. Определите вероятность события:

а) *A* — «Аня получит 1», если она не выполнила какое-либо одно из этих шести домашних заданий.

б) *B* — «Боря получит ровно одну 1», если он не выполнил какие-либо два домашних задания из этих шести заданий.

в) *C* — «Вася получит хотя бы одну 1», если он не выполнил какие-либо два домашних задания из этих шести заданий.

г) *D* — «Гоша получит ровно одну 1», если он не выполнил какие-либо три из этих шести заданий.

д) *E* — «Денис получит хотя бы одну 1», если он не выполнил какие-либо три из этих шести заданий.

Задачу а) разобрали в классе, остальные решали дома.

Решение. а) Если домашние задания пронумеровать от 1 до 6, то все возможности выбора учителем двух домашних работ (множество всех исходов опыта) можно изобразить на схеме 1.

Схема 1

12	13	14	15	16
23	24	25	26	
34	35	36		
45	46			
56				

Учитель может выбрать две домашние работы 15-ю способами. Это и есть число сочетаний из 6 по 2, оно равно $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Любая домашняя работа встречается в паре с другой домашней работой 5 раз. Если Аня не выполнит одну из шести домашних работ, то имеется 5 случаев из 15, что её работа попадет в пару работ, проверяемых учителем.

Вычислим вероятность события *A*: $p(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Остальные задачи дети решали самостоятельно и потом решения разбирались в классе.

б) Если Боря не выполнит две из шести домашних работ, например, две первые, то имеется 8 случаев из 15 (на схеме 2 они выделены), что только одна из невыполненных работ попадёт на проверку к учителю.

Схема 2

12	**13**	**14**	**15**	**16**
23	**24**	**25**	**26**	
34	35	36		
45	46			
56				

Вычислим вероятность события B: $p\ (B) = \frac{8}{15}$.

в) Если Вася не выполнит две из шести домашних работ, например, две первые, то имеется 9 случаев из 15 (к выделенным на схеме 2 добавится ещё случай 12), что хотя бы одна невыполненная работа попадёт на проверку к учителю.

Вычислим вероятность события C: $p\ (C) = \frac{9}{15} = 0{,}6$.

г) Если Гоша не выполнит три из шести домашних работ, например, три первые, то имеется 9 случаев из 15 (на схеме 3 они выделены), что только одна из невыполненных работ попадёт на проверку к учителю. В девяти случаях из пятнадцати у Гоши не будет выполнена только одна домашняя работа из выбранных учителем.

Схема 3

12	13	**14**	**15**	**16**
23	**24**	**25**	**26**	
34	**35**	**36**		
45	46			
56				

Вычислим вероятность события D: $p\ (D) = \frac{9}{15} = 0{,}6$.

д) Если Денис не выполнит три из шести домашних работ, например, три первые, то имеется 12 случаев из 15 (к выделенным на схеме 3 добавятся случаи 12, 13 и 23), что хотя бы одна из невыполненных работ попадёт на проверку к учителю. В двенадцати случаях из пятнадцати у Дениса будет не выполнена хотя бы одна домашняя работа из выбранных учителем.

Вычислим вероятность события E: $p\ (E) = \frac{12}{15} = 0{,}8$.

Ответ. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{8}{15}$; в) 0,6; г) 0,6; д) 0,8.

3. Имеется тест из четырёх заданий. К каждому из заданий даны 5 ответов для выбора. Контролирующее устройство проверяет работу ученика по номерам выбранных ответов и выставляет отметку: «5» — за выбор верных ответов во всех четырёх заданиях, «4» — за выбор верных ответов в любых трёх заданиях, «3» — за выбор верных ответов в любых двух заданиях, «2» — за выбор верного ответа лишь в одном задании, «1» — за выбор неверных ответов во всех четырёх заданиях. Ученик, не выполняя заданий, решил случайным образом указать номера верных ответов в каждом из них. Вычислите вероятность таким способом получить отметку: а) «5»; б) «4»; в) «3»; г) «2»; д) «1».

Решая задачу **3**, мы освоили понятия противоположного события, суммы, произведения событий, независимых, несовместных событий, научились вычислять их вероятности. То есть далеко продвинулись за пределы программы 6 класса.

Дальше идёт вариация на тему задач из ЕГЭ.

4. Стрелок стреляет по одному разу в каждую из трёх мишеней. Вероятность попадания в мишень равна 0,9. Определите вероятность события:

а) Стрелок не попал в первую мишень и попал в другие мишени.
б) Стрелок попал в какие-либо две мишени и не попал в третью.
в) Стрелок попал в первую мишень и не попал в другие мишени.
г) Стрелок попал ровно в одну мишень.
д) Стрелок попал хотя бы в одну мишень.

В задаче Т. Юнусова добавлены подзадачи, подводящие к получению ответа на последний вопрос. Кстати, Тимур первым решил свою задачу.

5. У пирата 8 шестизарядных револьверов. Пять из них он зарядил одним патроном, остальные остались незаряженными, крутанул барабан каждого заряженного револьвера так, что нельзя понять, каким по счету будет выстрел из этого револьвера. Из восьми револьверов выбрал три случайным образом. Пират хочет нажать на курок каждого из них по одному разу. Вычислите вероятность того, что он:

а) услышит 3 выстрела;
б) услышит ровно 2 выстрела;
в) услышит ровно 1 выстрел;
г) не услышит ни одного выстрела;
д) услышит хотя бы один выстрел.

Приведённый пример показывает, что сложная задача может стать стимулом для работы, включающей разбор подготовительных задач, расширение круга теоретических сведений. Эта работа вполне может быть выполнена в жанре «проекта».

Большой простор для выбора темы проекта дают текстовые задачи.

Возьмём, например, тему «**Задачи на совместную работу**». Здесь можно поставить задачу в 5-6 классах научиться решать задачи, которые включались в ЕГЭ. Чтобы этого добиться, надо сначала освоить простые задачи, приводящие к сложению или вычитанию дробей.

6. Первый ученик убирает класс за 30 минут, второй — за 20 минут. За сколько минут два ученика уберут класс при совместной работе?

7. Два ученика при совместной работе уберут класс за 12 мин. Первый ученик убирает класс за 30 минут. Второй — за 20 минут. За сколько минут второй ученик один уберёт класс?

В новое издание учебника для 5 класса будет включена переформулировка одной замечательной задачи в стихах.

8. За пять недель маляр Истомин
Покрасит стены в целом доме.
А лучший мастер Глеб Куделин
Покрасит стены в две недели.
За сколько дней, нам интересно,
Они всё сделают совместно?

Решение. Примем всю работу за единицу и выразим время работы в днях: маляр Истомин покрасит стены в доме за $5 \cdot 7 = 35$ дней, а лучший мастер Куделин покрасит те же стены за $2 \cdot 7 = 14$ дней.

1) $1 : 35 = \frac{1}{35}$ (работы) — выполняет Истомин за 1 день;

2) $1 : 14 = \frac{1}{14}$ (работы) — выполняет Куделин за 1 день;

3) $\overset{2/}{\frac{1}{35}} + \overset{5/}{\frac{1}{14}} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$ (работы) — выполняют маляры при совместной работе за 1 день;

4) $1 : \frac{1}{10} = 10$ (дней) — за такое время они покрасят стены дома при совместной работе.

Ответ: за 10 дней.

Далее надо подобрать старинные задачи и старинные способы их решения — на них будет строиться метод решения рассмотренной сегодня задачи.

9. *ЕГЭ, 2009.* Маша и Настя могут вымыть окно за 20 минут. Настя и Лена могут вымыть это же окно за 15 минут, а Маша и Лена — за 12 минут. За какое время девочки вымоют окно, работая втроём?

А вот ещё интересная задача.

10. *ЕГЭ, 2009.* У Алёны есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Алёна садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алёна говорила по телефону ровно половину времени поездки?

Решение. Пусть Алёна 1 час говорила по телефону и 1 час телефон находился в режиме ожидания. Тогда за эти 2 часа израсходована $\frac{1}{6}+\frac{1}{210}=\frac{6}{35}$ заряда батарейки. Поэтому полного заряда батарейки хватит на $1:\frac{6}{35}=\frac{35}{6}$ таких пар часов, то есть на $2\cdot\frac{35}{6}=\frac{35}{3}$ (часа), или на 11 часов 40 минут.

Далее можно рассмотреть задачи с тремя работниками — тоже два типа. Если дружите с программированием или с учителем информатики, то можно написать программу, которая будет решать любую задачу типа:

11. Первая труба наполняет бассейн за *a* часов, вторая труба — за *b* часов. За сколько часов они наполнят бассейн при совместной работе?

Потом можно составить программы для других задач. Эта работа описана в моей книге «Текстовые задачи: 7-11» [5]. Хотите усложнить работу? — В конце учебника для 5 класса есть серия задач на движение по реке, которые решаются аналогично. Сначала подготовительные, а потом вот эта задача.

12. Теплоход от Киева до Херсона плывет 5 суток, а обратно — 7 суток. Сколько суток будут плыть плоты от Киева до Херсона?

Ещё есть интересные задачи на максимум-минимум, примыкающие к задачам на совместную работу.

13. Имея полный бак топлива, рыбак может проплыть на моторной лодке 20 км против течения или 30 км по течению реки. На какое наибольшее расстояние он может отплыть по реке, чтобы топлива хватило и на обратный путь? (Движение с выключенным мотором не рассматривается.)

14. Остап Бендер купил для «Антилопы-Гну» 4 новых колеса. Передние колёса автомобиля изнашиваются через 12 000 км пробега, а задние — через 8 000 км пробега. Какой наибольший путь может проехать «Антилопа-Гну», если Адам Козлевич догадается вовремя поменять задние колёса с передними?

А как интересно можно в 5-6 классах построить работу по теме «Сложные задачи на проценты», решаемые с помощью совета «Не бойтесь вводить лишнюю букву!» Они выводят учащихся на задачи ОГЭ-ЕГЭ. Такая статья из книги [3] вложена в папку «Участнику семинара Красноярск-2016», которую можно скачать сегодня или получить от меня по электронной почте. Через «пятёрочки» удалось выстроить линию задач, выводящую на задачи следующего вида.

15. *ЕГЭ, 2008.* Брюки дороже рубашки на 25 % и дешевле пиджака на 20 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

Решение. Пусть рубашка стоит x р., а пиджак — y р. Тогда брюки стоят $1{,}25x$ р., или $0{,}8y$ р. Из уравнения $1{,}25x = 0{,}8y$ получаем: $x = 0{,}64y$.

Рубашка дешевле пиджака на $\dfrac{(y-x)\cdot 100\,\%}{y} = 36\ \%$.

Ответ. На 36 %.

Что-то мы засиделись в 5-6 классах? Но если не заинтересовать детей математикой в младших классах, то дальнейшее учение может превратиться для них в мучение.

7 класс. Здесь есть свои благодатные темы.

7.1. Формулы сокращённого умножения с выходом на степень двучлена, равную 3, 4, 5… и треугольник Паскаля, формулы, изучаемые в физматклассе. Здесь можно показать геометрические иллюстрации некоторых формул сокращённого умножения. Например, формулы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ для } a > b \text{ и } b > 0$$

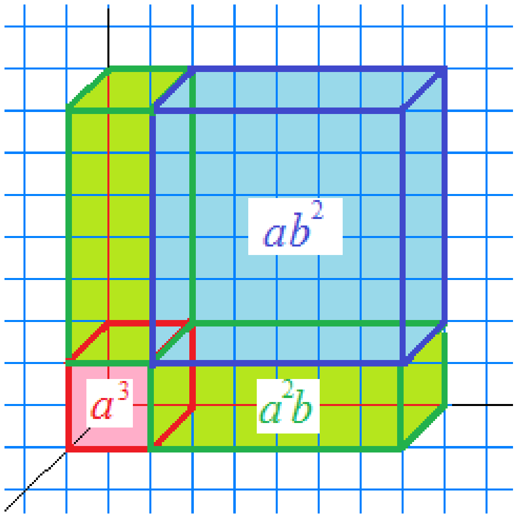
и попросить придумать геометрическую иллюстрацию для формулы

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ для } a > b > 0.$$

Такие задания есть у нас в учебнике «Алгебра, 7» серии «МГУ – школе» (С.М. Никольский и др.), включены в «Рабочую тетрадь» для 7 класса.

Можно попросить их сделать объёмную модель из прямоугольных параллелепипедов (на рисунке показан её задний слой) для иллюстрации формулы

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ для $a > b > 0$.



Здесь внутри куба с ребром $(a + b)^2$ расположен красный куб объемом a^3 (как на рисунке), вдоль рёбер большого куба — три зелёных прямоугольных параллелепипеда объёмом a^2b, к каждой грани большого куба, которых касаются три зелёных параллелепипеда, примыкает прямоугольный параллелепипед объёмом ab^2 — их тоже три. Ещё остаётся место для одного куба объемом b^3.

Не важно, что некоторые «открытия» ребят уже есть в учебниках, самостоятельное открытие *новых для себя фактов* чрезвычайно важно для создания благоприятного эмоционального фона изучения математики и получения важного сигнала: «я тоже что-то могу придумать».

В классе посильнее можно взять тему «Линейные диофантовы уравнения» — Дополнение к главе 3 (Алгебра, 7), в других источниках. Сюда можно добавить задачу, придуманную моим учеником.

Однажды шестиклассник Чуйков Сергей придумал такую задачу.

16. Существует ли на клетчатой бумаге прямоугольник, составленный из клеток-квадратов, в котором количество его внешних клеток равно количеству внутренних клеток?

Рисунок поясняет, какие клетки называют внешними, какие — внутренними.

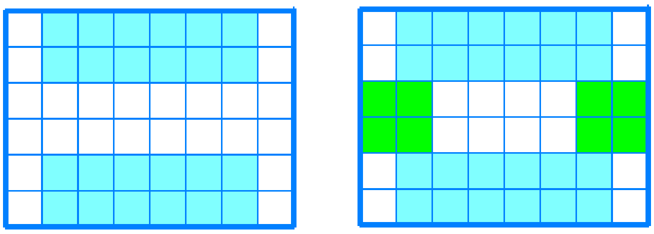
Кто-то из моих учащихся нарисовал один такой прямоугольник, кто-то — другой. Нашлись ученики, которые нарисовали два таких прямоугольника.

Мы решили задачу С. Чуйкова, доказали, что искомый четырёхугольник существует, но дальше естественным образом стали возникать новые задачи.

17. Сколько существует прямоугольников, удовлетворяющих условию задачи **16**?

Рассказывая решение этой задачи, я дал «взрослое решение» с помощью диофантова уравнения, но понял, что поторопился. В голову пришла мысль, что задача, быть может, решится, если специальным образом раскрашивать клетки прямоугольника. Я ещё сам не довёл до конца эту идею, а на следующей перемене Григорьев Д. принёс такое **решение**.

Сначала закрасим поровну внешних и внутренних клеток, прилежащих только к верхней и нижней сторонам прямоугольника (рис. слева),



Затем закрасим поровну внешних и внутренних клеток, прилежащих к боковым сторонам прямоугольника (рис. справа).

По углам прямоугольника остались незакрашенными 8 клеток — они внешние. Так как должно быть закрашено поровну внешних и внутренних клеток, то внутри прямоугольника должны остаться незакрашенными тоже 8 клеток — как на рисунке справа.

Эти 8 клеток могут образовать два внутренних прямоугольника: 8x1 и 4x2. Чтобы получить исходные прямоугольники, надо длины сторон внутреннего прямоугольника — 8 и 1, 4 и 2 — увеличить на 4. Получаем два прямоугольника 12x5 и 8x6, удовлетворяющих условию задачи **16**.

В книге «Математика — это интересно!» приведены задачи, развивающие идею задачи С. Чуйкова и моё «взрослое» решение при помощи диофантова уравнения.

7.2. А какая интересная тема «Старинные текстовые задачи»!

7.3. В конце каждого учебника для 7-9 классов есть специальный раздел «Задания для исследования». Вот одна из них для 7 класса.

18. Учитель хочет составить несколько вариантов задачи на совместную работу: «Первая бригада может выполнить задание за a дней, вторая — за b дней. За сколько дней они выполнят это задание при совместной работе?» При этом он хочет, чтобы в каждом варианте был один и тот же ответ — «за 24 дня». Сколько различных вариантов задачи он может составить, если $a > b$?

Здесь нужно составить уравнение, связывающее натуральные числа a, b и 24:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{24}.$$

Выразим a через b:

$$a=\frac{24b}{b-24}.$$

Так как a и b — натуральные числа, то $b > 24$. Из условия $a > b$ следует, что

$$\frac{24b}{b-24} > b.$$

По изученному в начале года свойству неравенств разделим неравенство на положительное число b. Полученная дробь будет больше 1 при условии, что её числитель будет больше знаменателя: $24 > b - 24$. Используя другое свойство неравенств, прибавим справа и слева 24, получим $48 > b$, или $b < 48$. Итак, $24 < b < 48$.

Затем надо выполнить полный перебор значений b и получить **ответ:** 10 способов.

В этой и в других задачах учащиеся приучаются работать с величиной, численное значение которой изменяется, в зависимости от значения этой величины меняется другая величина. То есть осваивают идею параметра.

Вот две задачи попроще на идею поиска решений диофантова уравнения методом перебора.

19. Для награждения победителей математической олимпиады купили 7 одинаковых блокнотов и 6 одинаковых книг на 378 р. Определите цену 1 блокнота (она больше 20 р.) и цену 1 книги (она больше 30 р.), если известно, что обе цены выражаются целыми числами.

20. Купили несколько мороженых по 35 р. и пирожных по 27 р. на 480 р. Определите число купленных мороженых и число купленных пирожных.

8-9 классы. Здесь можно придумать несколько тем про текстовые задачи, функции и графики, уравнения и неравенства. В каждом из учебников есть раздел «Задания для исследования». Толчком для исследования может стать и какая-то тема по программе для углублённого изучения математики — такие темы есть в дополнениях после каждой главы в учебниках алгебры для 7-9 классов.

Приведу пару задач из учебника для 9 класса.

21. В период бурного роста цен Сбербанк России с 1 октября 1993 г. за хранение денег на депозитном вкладе в течение 12, 6 и 3 месяцев выплачивал доход в размере 150%, 130% и 120% годовых соответственно. Какой доход можно было получить за год:

а) при двукратном вложении денег на 6 месяцев;

б) при четырёххкратном вложении денег на 3 месяца?

22. Каким наибольшим целым числом x должен выражаться процент годовых для депозитных вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 1 год под $p\%$ годовых? Каким наибольшим целым числом y должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 6 месяцев?

Решите задачу в общем виде, проведите расчёты для $p = 150$.

10-11 классы. Здесь уже больше тем, в частности работающих на ЕГЭ и поступление в вуз, связанных с отдельными темами или типовыми задачами. Например, «Банковские задачи в ЕГЭ-2016». Но это уже тема следующего разговора.

Литература

1. **Пеньковских Е. А.** Генезис метода проектов в отечественной педагогике в 20-30 гг. XX столетия. http://vestnik.yspu.org/releases/pedagoka_i_psichologiy/36_4/
2. **Проектная и исследовательская деятельность учащихся.** https://infourok.ru/proektnaya_i_issledovatelskaya_deyatelnost_uchaschihsya.-574687.htm
3. **Шевкин А.В.** Математика — это интересно! Заметки о составлении и решении задач с младшими школьниками. – М.: ИЛЕКСА, 2014.
4. **Ступницкая М.А.** Что такое учебный проект? – Первое сентября, 2014, 44 с.
5. **Шевкин А.В.** Текстовые задачи: 7-11. – М.: ИЛЕКСА, 2015.

avshevkin@mail.ru
www.shevkin.ru