Арифметические способы решения текстовых задач

Шевкин А.В., учитель математики
физико-математической школы № 2007 г.
Москвы, к.п.н., Заслуженый учитель РФ

С 1985 года, ещё через ротапринтные варианты нашего первого экспериментального учебника «Арифметика, 5–6» (С.М. Никольский и др.) мы предлагаем отказаться от навязанного школе раннего использования уравнений для решения текстовых задач и развивать мышление и речь учащихся — «инструментарий обучения» (и не только математике). Здесь на первое место выходят арифметические способы решения текстовых задач, знакомство учащихся со старинными задачами и способами их решения.

При арифметическом способе решения задач ребенок манипулирует с более понятными объектами, о которых сказано в условии задачи, а не с отвлеченными иксами. Он действует с книгами, тетрадями и т. п., представляя их количества в виде прямоугольников, отрезков. Результат каждого действия он может истолковать с точки зрения тех данных, которые есть в условии задач. В раннем школьном возрасте (5-6 классы) мышление школьников предметно и развивать его надо в работе с предметами и их представителями — прямоугольниками, отрезками, частями и т. п.

Большую роль в работе задач мы в своих учебниках отводим старинным задачам и старинным способам их решения. Это позволяет создавать положительный эмоциональный фон обучения и вводить обучение в исторический контекст, показывать связь математики с жизнью, с историей своего народа и всего человечества, что напрямую работает на развитие и на понимания роли математики в мире, в котором мы живём. Этого требует и новая программа.

За последние 20 лет я написал ряд статей и книг, обосновывающих необходимость возвращения к утраченной традиции, показал реализацию этого подхода в сборниках текстовых задач и в учебниках.

Я рад, что давно предлагаемые мною идеи возрождения отечественных традиций в обучении школьников были поддержаны составителями программ по математике 2015-2016 гг. В эти программы включено требование «учащиеся должны уметь решать задачи арифметическими способами». Тем самым завершился мой заочный спор с Н.Я. Виленкиным, писавшим в журнале «Математика в школе» (4/1988): «Следует отказаться от многих разделов, сохраняющихся в школьном курсе математики лишь по традиции. Здесь придётся ломать сопротивление тех методистов, которые и по сей день восхваляют решение задач арифметическим способом...».

В Концепция моего курса повышения квалификации для учителей "Текстовые задачи в школьном курсе математики" (Первое сентября, 2005-2016) записано:

«Пока мы будем учить детей на русском языке — не только великом и могучем, но и достаточно трудном, пока мы хотим учить их сравнивать, выбирать наиболее простой путь достижения поставленной цели, пока мы не отказались от воспитания гибкости и критичности мышления, пока мы стараемся увязывать обучение математики с жизнью, нам будет трудно обойтись без текстовых задач — традиционного для отечественной методики средства обучения математике».

Теперь уже многие родители и учителя плохо представляют, что такое арифметические способы решения текстовых задач, какие возможности для развития мышления и речи школьников они не используют, не всегда видят пользу в использовании текстовых задач и арифметических способов их решения, теряются в простых ситуациях.

Вот пример из моей переписки в гостевой книге сайта www.shevkin.ru.

21. Имя: Елена, город: Москва

Скажите, пжта, где найти ответы и метод.рекомендации к каждому из упражнений Рабочей тетради Математика 5 класс, М.К. Потапов А.В. Шевкин… В разделе "Книги" не нашла. Мама ученицы 5 класса.

AV**:** Ответы может найти каждый ученик самостоятельно. Если вдруг есть "непреодолимые" задания, то напишите мне на почту avshevkin@mail.ru. попробую помочь в поиске решения.

01:10, 24.09.2014

22. Имя: Елена, город: Москва

...каждый ученик школы с углубл. изучением математики – может быть. Но мы не в спецшколе. А Вы просчитывали какое количество учеников школ Москвы, перешедших на Вашу программу, останется без базовых знаний с учетом такого показателя как бестолковыелենивыеуставшие учителя, которые не умеют и/или не хотят увлечь наших детей математикой? Ваши слова про каждого ученика настолько оторваны от реальности... Может все-таки в качестве компенсации напишите для нас, родителей, объяснения и решения к упражнениям, задачам? уроки-то мы с ними делаем... Пишу после бессонной ночи, телефонных переговоров между родителями почти целого 5 класса. Решали задачи и придумывали как их изобразить схематично с № 61 по № 65 Рабочей тетради. Не придумали. А многие родители и не смогли сами решить. Да мы еще и после Петерсон.

AV: **61**. Разность двух чисел на 23 меньше первого из них. Найдите второе число.

Решение. Переформулируем вопрос: на сколько уменьшили первое число, если при вычитании получили ответ на 23 меньше первого числа (уменьшаемого)? Ответ: на 23, то есть второе число 23. Примеры: 33 – 23 = 10, 45 – 23 = 22, ... (уменьшаемое и разность определить нельзя, но это и не требуется).

62. Разность двух чисел на 50 меньше первого числа и на 20 меньше второго. Найдите числа и разность.

Решение. Первое число уменьшили на 50, значит, второе число 50. Разность на 20 меньше второго числа, то есть разность равна 50 – 20 = 30. Первое число (уменьшаемое) найдём сложением: 30 + 50 = 80. Мы наши все числа: 80 – 50 = 30.

Дальше попробуйте сами, только спокойнее, без обиды на учителей и мой отрыв от реальности? ….

Спасибо за вопрос и желаю успехов.

22:35, 24.09.2014

23. Имя: Елена, **город:** Москва

Как же просто!!!! А мы с уравнениями, да еще с двумя неизвестными... нарешали... как объяснить детям, чтобы их окончательно не запутать, голову ломали. Спасибо...

До сих пор в школе изучают только один способ решения всевозможных задач, который дети усваивают с большим трудом. Однажды моя коллега рассказала, как её попросил ученик: Научите нас, пожалуйста, решать задачи «На пусть». На мой взгляд, ребенок гениально выразил свою проблему: задачи разные, но все начинаются «Пусть *x* — …», а что делать дальше, он не знает — в разных задачах надо действовать по-разному, а как, он не знает.

Приведу несколько примеров, показывающих, что такое арифметические способы решения и какие результаты даёт методика, реализованная в упомянутых учебниках и книгах. В учебнике мы различаем несколько типовых задач, к решению которым подходим по-разному. Это задачи, связанные с арифметическими действиями, задачи «на части», на нахождение двух чисел по их сумме и разности, на движение по реке, на движение, на совместную работу, на деление числа в данном отношении, на пропорции, на проценты и др.

Рассмотрим типовую задачу из учебника для 5 класса на нахождение двух чисел по их сумме и разности.

- В двух пачках 70 тетрадей — в первой на 10 тетрадей больше, чем во второй. Сколько тетрадей в каждой пачке?

Уберём 10 тетрадей из первой пачки, тетрадей в пачках станет поровну, по (70 –10):2 = 30. Теперь вернём в первую пачку 10 тетрадей, в ней станет 30 + 10 = 40 (тетр.).

1) 70 – 10 = 60 (тетр.) — удвоенное число тетрадей во второй пачке,
2) 60:2 = 30 (тетр.) — во второй пачке,
3) 30 + 10 = 40 (тетр.) — в первой пачке.

- *Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона*. Некто желает распределить между бедными деньги. Если бы у него было на восемь динариев больше, то он мог бы дать каждому по три, но он раздаёт лишь по два, и у него ещё остаётся три. Сколько бедных?

Представим, что некто раздавал сначала по 2 динария и у него осталось 3 динария. Если бы у него было на 8 динариев больше, то 11 динариев он распределил бы между всеми бедными, дав каждому ещё по 1 динарию. То есть бедных было 11.

Запишем это решение по действиям.

1) 3 + 8 = 11 (динариев) — можно раздать сверх выданных двух динариев, если будет ещё 8 динариев.

2) 3 – 2 = 1 (динарий) — можно дать каждому сверх двух динариев.

3) 11 : 1 = 11 (бедных) — было.

Возьмём старинную китайскую задачу с «круглыми» числовыми данными:

- В клетке сидят фазаны и кролики. Всего у них 30 голов и 70 ног. Определите число фазанов и число кроликов.

Можно составить уравнение

$$4x + 2\cdot(30 - x) = 70,$$

где x — число кроликов, и получить ответ задачи. Но если мы обучаем детей не только с целью получения ответа в задаче, но и с целью развития их мышления и речи в процессе работы с нею, если нам небезразличен эмоциональный фон обучения, то полезно провести диалог, найденный мною у старых мастеров методики обучения математике и вызывающий у детей живейшее участие в решении задачи.

— Дети, представим, что на верх клетки, в которой сидят фазаны и кролики, мы положили морковку. Все кролики встанут на задние лапки, чтобы дотянуться до морковки. Сколько ног в этот момент будет стоять на земле?

— 60   (30·2 = 60).

— Но в условии задачи даны 70 ног, где же остальные?

— Остальные не посчитаны — это передние лапы кроликов.

— Сколько их?

— 10   (70 – 60 = 10).

— Сколько же кроликов?

— 5   (10:2 = 5).

— А фазанов?

— 25 (30 – 5 = 25).

Есть и другой вариант рассуждения: сначала запустить в клетку 30 фазанов, потом заменять их на подходящее количество кроликов.

- *Из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого.* Некий человек нанял работника на год, обещал ему дать 12 *р.* и кафтан. Но тот, отработав 7 месяцев, захотел уйти и просил достойной платы с кафтаном. Хозяин дал ему по достоинству расчет 5 *р.* и кафтан. Спрашивается, какой цены тот кафтан был.

Здесь можно составить уравнение $\frac{x+12}{12}\cdot 7 = x+5$, где x *р.* — стоимость кафтана. Ученица 6 класса Андреева Аня (школа 679, Москва) предложила вычислить стоимость одного месяца работы проще: работник не получил 12 – 5 = 7 (*р.*) за неотработанные 12 – 7 = 5 (месяцев), поэтому за 1 месяц ему платили 7:5 = 1,4 (*р.*), а за 7 месяцев он получил 7·1,4 = 9,8 (*р.*), тогда кафтан стоил 9,8 – 5 = 4,8 (*р.*).

А вот известная задача «на совместную работу» из нашего учебника для 5 класса.

- *Из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого*. Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, а с женою выпьет ту же кадь в 10 дней. Спрашивается, в сколько дней жена его отдельно выпьет ту же кадь.

В учебнике приведено старинное решение задачи: За 140 дней человек выпьет 10 бочонков, а вместе с женой за 140 дней они выпьют 14 бочонков. Значит, за 140 дней жена выпьет 4 – 10 = 4 бочонка. Один бочонок она выпьет за 140:4 = 35 дней.

Здесь для решения задачи делается предположение, что муж и жена пили, видимо, квас 140 дней (можно было бы взять 70 дней), то есть здесь проводится мысленный эксперимент. Применим тот же приём для решения следующей задачи.

- *ЕГЭ, 2009.* Маша и Настя могут вымыть окно за 20 *мин*. Настя и Лена могут вымыть это же окно за 15 *мин*, а Маша и Лена — за 12 *мин*. За какое время девочки вымоют окно, работая втроём?

Задачу можно решить, составив систему уравнений. А можно арифметически, используя старинный способ решения задач. Пусть у нас было две Маши, две Насти и две Лены, причём девочки с одинаковыми именами работают с одинаковой производительностью. Тогда за 60 *мин* Маша и Настя вымоют 3 окна, Настя и Лена вымоют 4 окна, а Маша и Лена вымоют 5 окон. За 60 *мин* 6 девочек при совместной работе вымоют 3 + 4 + 5 = 12 (окон). Тогда Маша, Настя и Лена за 60 *мин* вымоют 6 окон, а одно окно они вымоют за 60 : 6 = 10 (*мин*).

- *ЕГЭ, 2009.* У Алёны есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Алёна садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алёна говорила по телефону ровно половину времени поездки?

Пусть Алёна 1 ч говорила по телефону и 1 ч телефон находился в режиме ожидания. Тогда за эти 2 ч израсходована $\frac{1}{6}+\frac{1}{210}=\frac{6}{35}$ заряда аккумулятора. Поэтому полного заряда аккумулятора хватит на $1:\frac{6}{35}=\frac{35}{6}$ таких пар часов, то есть на $2\cdot\frac{35}{6}=\frac{35}{3}$ (ч), или на 11 ч 40 мин.

Приведём пример ещё одного решения задачи, но не на совместную, а на последовательную работу, где «детское» решение может оказаться проще «взрослого». В марте 1017 г. известный методист-математик И.И. Александров написал предисловие к своей книге «Методы решений арифметических задач», в котором сформулировал задачу.

- Один человек может вскопать огород в 10 ч, другой в 20 ч. Часть работы выполнил первый, остальное — второй, причем в совокупности они работали 15 ч. Сколько часов работал первый и сколько второй?[1]

Приведём авторское решение. «Так как ответ не зависит от размера огорода, то дадим огороду произвольные размеры, например, 400 *кв. м*. Тогда первый вскопает в час 40 *кв. м*, а второй — 20 *кв. м*. Алгебра даёт два уравнения $x + y = 15$; $40x + 20y = 400$, простота которых вызвана чисто арифметическими соображениями. Обычное решение приводит к уравнениям $x + y = 15$; $\frac{x}{10}+\frac{y}{20} = 1$. Но каким образом получилось второе уравнение? Оно получилось потому, что догадываемся рассматривать части огорода, вскапываемые каждым человеком в час…».

---

[1] И.И. Александров, А.И. Александров. Методы решений арифметических задач. – М.: Учпедгиз, 1953. – 76 с.

Рассказывая об алгебраических решениях задачи, опирающихся на опыт решение задач на совместную работу арифметическим способом, автор замечательной книжки обходит стороной чисто арифметическое решение его задачи, которое могут дать наблюдательные школьники, да и утверждение «ответ не зависит от размера огорода» было бы неплохо обосновать. Без такого обоснования первый способ решения даёт пример частного решения задачи — при дополнительном условии. Полное решение получится, если обосновать независимость ответа от числового значения дополнительного условия.

Заметим, что 10 + 20 = 30 — ровно в два раза больше, чем 15! А теперь возможное «детское» решение.

Представим, что сначала первый вскопал весь огород за 10 *ч*, а потом второй вскопал точно такой же огород за 20 *ч*. На всю работу ушло ровно 30 *ч*. Выполнив половину этой работы, каждый из них вскопал бы по половине огорода, затратив в совокупности 10 : 2 + 20 : 2 = 15 (*ч*), что и дано в условии задачи. Для большей убедительности решения надо подчеркнуть, что если уменьшить долю работы первого работника, то общее время последовательной работы будет больше 15 *ч*, так как производительность первого работника больше. Если увеличить, то общее время последовательной работы будет меньше 15 *ч*. Следовательно, первый работал 10 : 2 = 5 (*ч*), а второй — 20 : 2 = 10 (*ч*).

А если ученик начнёт рассуждение с половины огорода, то решение будет короче.

Уверен, что следующую задачу на ОГЭ лучше решают те школьники, которые учились решать текстовые задачи арифметическими способами.

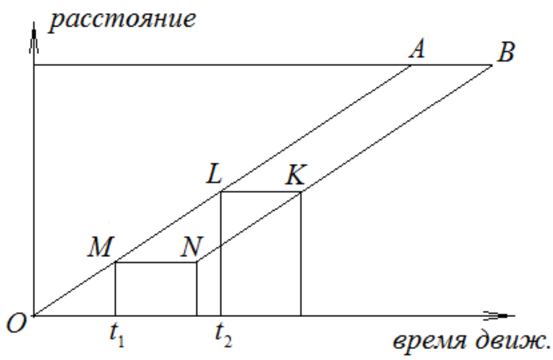
- *ОГЭ, 2016.* Из двух городов одновременно навстречу друг другу отправились два велосипедиста. Проехав некоторую часть пути, первый велосипедист сделал остановку на 28 минут, а затем продолжил движение до встречи со вторым велосипедистом. Расстояние между городами составляет 286 км, скорость первого велосипедиста равна 10 км/ч, скорость второго — 30 км/ч. Определите расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи.

Ответ задачи не зависит от того, в какой момент остановился первый велосипедист — лишь бы он после остановки отправился в путь до встречи со вторым велосипедистом. Будем считать, что первый велосипедист выехал позже на 28 мин = $\frac{7}{15}$ ч.

1) $30 \cdot \frac{7}{15} = 14$ (км) — проехал второй велосипедист до выезда первого;
2) 286 – 14 = 272 (км) — осталось проехать велосипедистам до встречи;

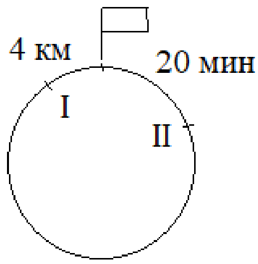
3) $10 + 30 = 40$ (км/ч) — скорость сближения двух велосипедистов;
4) $272 : 40 = 6{,}8$ (ч) — время движения велосипедистов после выезда второго велосипедиста;
5) $6{,}8 + \frac{7}{15} = 7\frac{4}{15}$ (ч) — время движения второго велосипедиста;
6) $30 \cdot 7\frac{4}{15} = 218$ (км) — искомое расстояние.

Замечание. Независимость ответа в задаче от момента остановки первого велосипедиста можно обосновать с помощью графика движения.



Пусть на горизонтальной оси откладывают время движения первого велосипедиста, а по горизонтальной — расстояние от первого города. Если первый велосипедист будет ехать без остановки, то графиком его движения будет отрезок *OA*. Если он сделает остановку в момент времени t_1 на 28 мин, то графиком его движения будет ломаная *OMNB*. Если же он сделает остановку в момент времени t_2 на 28 мин, то графиком его движения будет ломаная *OLKB*. Так как время остановки в пути одно и то же, то горизонтальные участки графиков движения *MN* и *LK* — равны и параллельны. Тогда *MNKL* параллелограмм (по признаку параллелограмма) и $MN \parallel LK$. Это означает, что конец *K* отрезка *LK* принадлежит отрезку *NB*, то есть после второй остановки графики движения велосипедиста совпадут. Поэтому не важно, в какой момент первый велосипедист сделал остановку. Важно только, что начать движение после остановки он должен до встречи со вторым велосипедистом.

- *ОГЭ, 2016.* Два бегуна стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 4 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 20 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 11 км/ч меньше скорости второго.



Заменим составление уравнения такими рассуждениями. Второй бегун, скорость которого на 11 км/ч больше, за 1 час пробежал на 11 км больше. Это расстояние складывается из 4 км, которые не добежал первый до места старта, и $11 - 4 = 7$ км, которые второй пробежал за 1/3 часа. Скорость второго $7 : 1/3 = 21$ км/ч, тогда скорость первого $21 - 11 = 10$ км\ч.

По действиям решение можно записать так.

1) 11·1 = 11 (км) — на 11 км второй бегун удалился от первого за 1 ч.

2) 11 – 4 = 7 (км) — пробежал второй бегун за 20 мин (1/3 часа);
3) 7 : 1/3 = 21 (км/ч) — скорость первого бегуна;
4) 21 – 11 = 10 (км/ч) — скорость второго бегуна.

Наши казахстанские коллеги проводят аналог нашего ЕГЭ базового уровня под названием Единое национальное тестирование (ЕНТ) «Математическая грамотность».

3. В двух карманах было 150 монет. Затем семнадцать монет были перемещены из одного кармана в другой. В результате, количество монет во втором кармане стало в два раза больше, чем в первом. До перемещения в первом кармане было

A) 85 монет
B) 50 монет
C) 87 монет
D) 75 монет
✓E) 67 монет

$(x-17)+2(x-17)=150$

$x-17+2x-34=150$

$3x=201$

$x=67$

Специалист, обучавший в Интернете выпускников казахстанской школы, применял уравнение. А задача решается проще арифметическим способом.

Определим, сколько монет стало в первом кармане после их перекладывания, для этого решим «задачу на части» — как мы учим в учебнике для 5 класса. Пусть новое число монет в первом кармане составляет 1 часть, тогда во втором — 2 части.

1) 1 + 2 = 3 (части) — приходится на 150 монет;
2) 150 : 5 = 50 (монет) — стало в первом кармане;
3) 50 + 17 = 67 (монет) — было в первом кармане первоначально.

Ответ. 67 монет.

18) В зоомагазине продаются маленькие и большие птицы. Большая птица вдвое дороже маленькой. Малика купила 5 больших птиц и 3 маленькие. Если бы она вместо этого купила 3 больших и 5 маленьких птиц, то потратила бы на 20 долларов меньше. Сколько стоит каждая из птиц?

A)12$ и 24$
B)25$ и 50$
C)18$ и 36$
D)40$ и 20$
E)20$ и 10$

x- цена мал птицы
2x - бол птицы

$(5\cdot 2x+3x)-(3\cdot 2x+5x)=20$

$x=10$

Рассмотрим «детское» решение задачи Р.М. Смаллиана, в которой речь шла про леди в зоомагазине.

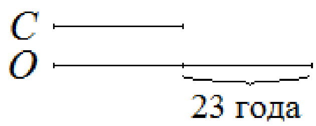
Так как большая птица стоит в два раза больше, чем маленькая, то первый раз заплачено столько, сколько стоят 5·2 + 3 = 13 маленьких птиц, а во второй раз столько, сколько стоят 3·2 + 5 = 11 маленьких птиц, т. е. 13 – 11 = 2 маленькие птицы стоят 20 долларов, столько же, сколько стоит 1 большая птица. Маленькая птица стоит 20 : 2 = 20 долларов.

Ответ. 10 и 20 долларов.

Вот ещё одна задача для выпускников казахстанской школы, решаемая в 5 классе как задача на части.

•Когда моему отцу был 31 год, мне было 8 лет, сейчас отец старше меня в два раза. Сколько лет мне сейчас?

Папа старше сына на 31 – 8 = 23 года. Сейчас отец в 2 раза старше сына, пусть возраст сына – 1 часть, тогда возраст отца – 2 части.



1) 2 – 1 = 1 (часть) приходится на 23 года, это и есть возраст сына сейчас.

Следующая задача с конкурсного экзамена, её аналог был в экзамене для физматклассов, она включена в наш учебник по алгебре для 9 класса.

- *ВШЭ, 1997.* Два брата купили акции одного достоинства на сумму \$3640. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму \$3927. Первый брат продал 75 % своих акций, а второй — 80 % своих. При этом сумма, полученная от продажи акций вторым братом, превышает сумму от продажи акций первым братом на 140 %. На сколько процентов возросла цена акции?

Вот обычное алгебраическое решение. Пусть братья купили акции по a долларов за штуку: первый брат — x акций, второй — y акций. Стоимость акций составила $ax + ay$, или 3640 долларов. Когда цена на эти акции возросла до b долларов за штуку, они продали часть акций на сумму $0{,}75bx + 0{,}8by$, или 3927 долларов. При этом сумма $0{,}8by$ была больше $0{,}75bx$ на 140 %, или в 2,4 раза. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + ay = 3640, \\ 0{,}75bx + 0{,}8by = 3927, \\ 0{,}8by = 2{,}4 \cdot 0{,}75bx. \end{cases}$$

Мы составили систему из трёх уравнений с четырьмя неизвестными. Она не имеет единственного решения, но из её уравнений можно три неизвестных величины выразить через четвёртую. Требуется определить, на сколько процентов увеличилась стоимость акции, т. е. величину $\frac{b-a}{a} \cdot 100\,\% = \left(\frac{b}{a} - 1\right) \cdot 100\,\%$. Из третьего уравнения системы выразим y через x (здесь $b \neq 0$ по смыслу задачи): $y = 2{,}25x$. Заменим y в первых двух уравнениях системы на $2{,}25x$, получим два равенства: $3{,}25ax = 3640$ и $2{,}55bx = 3927$, из которых получим: $a = \frac{1120}{x}$, $b = \frac{1540}{x}$, тогда $\frac{b}{a} = \frac{1540}{1120} = \frac{11}{8}$. Стоимость акции увеличилась на $\left(\frac{b}{a} - 1\right) \cdot 100\,\% =$ $= 37{,}5\,\%$.

А вот решение моего ученика Сидоренко Ивана (9 класс, ФМШ 2007), прошедшего обучение по нашим учебникам.

Суммы двух братьев, вырученные от продажи акций, относятся как 100 : (100 + 140) = 5 : 12. Разделим сумму 3927 в отношении 5 : 12 (типовая задача 6 класса), получим, что братья выручили от продажи акций 1155 и 2772 соответственно (здесь и далее все суммы в долларах).

Тогда перед продажей акции стоили: у первого брата — 1155 : 0,75 = = 1540, у второго — 2772 : 0,8 = 3465, а всего 1540 + 3465 = 5005. Все акции, а значит и каждая акция, выросли в цене на $\frac{5005 - 3640}{3640} \cdot 100\,\% =$ $= 37{,}5\,\%$.

Как видим, ученик обученный арифметическим способам решения текстовых задач в 5-6 классах способен применять их много позже и в тех задачах, где учитель ожидает от него алгебраического решения.

«Вишенкой на торте» в наших учебниках я всегда считал использование лишней буквы для решения текстовых задач арифметическим способом (без уравнений). В самые первые варианты наших учебников были включены задачи, для решения которых требовалось ввести букву, значение которой в процессе решения задачи найти нельзя, да и не требуется, но она помогает ответить на вопрос задачи. Я называю такую букву лишней или вспомогательной.

Задача **1049** из учебника «Математика, 5^2» вполне может быть решена без применения букв, но, сравнив первый способ решения со вторым, в котором используется вспомогательное неизвестное, можно заметить, что наименования величин становятся «стандартными» и упрощается обоснование решения задачи.

- Теплоход от Киева до Херсона идёт трое суток, а от Херсона до Киева — четверо суток (без остановок). Сколько времени от Киева до Херсона будут плыть плоты?

I способ. Теплоход в сутки проходит по течению реки $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (пути), а против течения $1 : 4 = \frac{1}{4}$ (пути). Вычтем $\frac{1}{4}$ из $\frac{1}{3}$, полученная разность — это удвоенная «скорость течения». Плоты за сутки проплывают $\frac{1}{12} : 2 = \frac{1}{24}$ (пути), значит, весь путь они проплывут за $1 : \frac{1}{24} = 24$ (дня).

II способ. Пусть x км — расстояние от Киева до Херсона, тогда скорость теплохода по течению $\frac{x}{3}$ км/сут, против течения $\frac{x}{4}$ км/сут.

1) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{x}{12}$ (км/сут.) — удвоенная скорость течения;

2) $\frac{x}{12} : 2 = \frac{x}{24}$ (км/сут.) — скорость течения;

3) $x : \frac{x}{24} = 24$ (дня) — время движения плотов.

Как мы видим, введение лишней буквы не изменило сути решения, но сделало пояснения к действиям более понятными.

В итоговых экзаменах встречаются задачи на вычисление средней скорости движения. Они тоже решаются введением лишней буквы.

Ещё одну возможность для применения вспомогательных неизвестных предоставляют задачи на проценты, для решения которым мы вычисляем отношение. Рассмотрим задачу **868** из учебника «Математика, 6[3]».

- В спортивной секции девочки составляют 60 % числа мальчиков. Сколько процентов числа всех участников секции составляют девочки?

Пусть в секции было m мальчиков, тогда девочек было $0,6m$. Всего в секции $1,6m$ участников, поэтому девочки составляют $\frac{0,6m}{1,6m} \cdot 100\% = 37,5\ \%$ числа всех участников секции.

- *ГИА-2009*. На должность заведующего кафедрой претендовало три кандидата: Климов, Лебедев, Мишин. Во время выборов за Мишина было отдано в 4 раза меньше голосов, чем за Климова, а за Лебедева — в 1,5 раза больше, чем за Климова и Мишина вместе. Сколько процентов голосов получил победитель?

Пусть за Мишина было отдано m голосов. Тогда за Климова было отдано $4m$ голосов, а за Лебедева $1,5 \cdot (4m + m) = 7,5m$ голосов. Голоса победителя Климова ($7,5m$) составляют $\frac{7,5m \cdot 100}{12,5m} = 60$ (%) от всех $12,5m$ голосов.

А вот задача олимпиадного уровня.

- На дороге, соединяющей два горных селения, нет ровных участков. Автобус едет в гору всегда со скоростью 30 км/ч, а под гору со скоростью 60 км/ч. Найдите расстояние между горными селениями, если путь туда и обратно без остановок занимает ровно 2 ч.

Пусть при движении от первого селения ко второму, автобус проехал x км в гору и y км с горы. Тогда на обратном пути он проехал y км в гору и x км с горы. На путь в оба конца автобус затратил $\frac{x}{30} + \frac{y}{60} + \frac{y}{30} + \frac{x}{60}$ ч, или 2 ч.

Составим уравнение: $\frac{x}{30}+\frac{y}{60}+\frac{y}{30}+\frac{x}{60}=2$, из которого найдём, что $x + y = 40$. Следовательно, расстояние между аулами равно 40 км.

Перейдём теперь к решению задач, в которых надо определить, на сколько процентов одно число больше (меньше) другого.

- На сколько процентов число 50 больше, чем число 40?

50 от 40 составляет $\frac{50 \cdot 100\,\%}{40}$ = 125 %.
Это на 125 % – 100 % = 25 % больше, чем число 40.
Ответ. На 25 %.
Тот же результат получим, объединив два действия:
$125\,\% - 100\,\% = \frac{50 \cdot 100\,\%}{40} - 100\,\% = \frac{(50-40) \cdot 100\,\%}{40}$.
Обобщим полученный результат:

число a больше, чем число b на $\frac{(a-b) \cdot 100\,\%}{b}$.

Здесь и далее надо обращать внимание учащихся на то число, с которым сравнивают в процентах другое число. Это число будет всегда оказываться в знаменателе дроби в тех формулах, которые мы составим для решения задач на сравнение двух чисел в процентах.

- На сколько процентов число 40 меньше, чем число 50?

40 от 50 составляет $\frac{40 \cdot 100\,\%}{50}$ = 80 %.
Это на 100 % – 80 % = 20 % меньше, чем число 50.
Ответ. На 20 %.
Тот же результат получим, объединив два действия:
$100\,\% - 80\,\% = 100\,\% - \frac{40 \cdot 100\,\%}{50} = \frac{(50-40) \cdot 100\,\%}{50}$.
Обобщим полученный результат:

число b меньше, чем число a на $\frac{(a-b) \cdot 100\,\%}{a}$.

Таким образом, чтобы найти, на сколько процентов одно число больше (меньше) другого, можно их разность (большее минус меньшее) разделить на то число, с которым сравниваем, и результат умножить на 100.

- У Вовы «пятёрок» на 60 % меньше, чем «троек». На сколько процентов у Вовы «троек» больше, чем «пятёрок»?

Пусть у Вовы было p «пятёрок» и t «троек». По условию задачи $p = \left(1-\frac{60}{100}\right) \cdot t = 0{,}4t$. У Вовы «троек» больше, чем «пятёрок», на

$$\frac{(t-p)\cdot 100\,\%}{p} = \frac{(t-0{,}4t)\cdot 100\,\%}{0{,}4t} = \frac{0{,}6t\cdot 100\,\%}{0{,}4t} = 150\ \%.$$

Ответ. На 150 %.

- *ЕГЭ, 2008.* Брюки дороже рубашки на 20 % и дешевле пиджака на 46 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

Пусть рубашка стоит r руб., а пиджак стоит p руб., тогда брюки стоят $1{,}2r$ руб., или $0{,}54p$ руб. Но это одна и та же сумма, следовательно, $1{,}2r = 0{,}54p$., откуда получаем, что $r = 0{,}45p = p - 0{,}55p$. Это означает, что рубашка дешевле пиджака на 55 %.

Вот ещё один пример с «автобиографической» задачей. Как-то раз с мамой и племянниками отправились мы в Тверской области в лес за малиной. Племянник всё время просил меня «загадать задачку», а когда задачки закончились, я начал сочинять новую задачу «на злобу дня».

- Брат и сестра собирали малину в двухлитровые бидоны. Брат собирал ягоды быстрее сестры. Через некоторое время он решил ей помочь и поменялся с ней бидонами. Момент для обмена бидонами был выбран удачно — ребята наполнили их ягодами одновременно. Сколько литров ягод они набрали вместе до того, как поменялись бидонами?

Вот мое «взрослое» решение. Пусть брат до обмена бидонами собрал x л, а сестра y л ягод, тогда после обмена брат собрал $(2 - y)$, а сестра $(2 - x)$ л ягод. Брат собирал ягоды быстрее сестры в одно и то же число раз до и после обмена бидонами, поэтому x больше y во столько же раз, во сколько $(2 - y)$ больше, чем $(2 - x)$. Составим уравнение:

$$\frac{2-y}{2-x} = \frac{x}{y}.$$

Умножив уравнение на отличное от нуля произведение $y(2 - x)$, получим квадратное уравнение, которое преобразуем:

$$x^2 - 2x + 2y - y^2 = 0,$$
$$(x - y)(x + y) - 2(x - y) = 0,$$
$$(x - y)(x + y - 2) = 0.$$

Из условия задачи следует, что $x > y$, значит, $x - y \neq 0$, тогда $x + y - 2 = 0$, откуда $x + y = 2$. Мы получили ответ на вопрос задачи: до обмена бидонами ребята собрали 2 л ягод.

А вот «детское» решение без уравнения моего ученика Просина Дениса (школы № 679, Москва). Брат должен поменяться с сестрой бидонами в тот момент, когда ему останется собрать ровно столько ягод, сколько к этому моменту собрала сестра. Тогда после обмена бидонами каждый из них соберёт столько же ягод, сколько и до обмена, а вместе — ровно половину от объёма двух бидонов, т. е. 2 л.

Следующая задача получилась переформулировкой моей более сложной задачи про сбор малины в журнале «Квант».

- Сулико подошла к роднику с двумя пустыми кувшинами. Один вмещал 5 л, а другой — 4 л. Вода из родника текла двумя струями — одна сильнее, другая слабее. Сулико одновременно подставила кувшины под струи и, когда набралась половина меньшего кувшина, поменяла кувшины местами. Как это ни удивительно, но кувшины наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды даёт одна струя, чем другая?

Остается пожелать учителям: используйте арифметические способы решения задач — и ваши ученики неоднократно удивят вас, предложив свои «детские» решения, которые окажутся проще ожидаемых вами «взрослых» решений с применением уравнений и их систем.