3. Детское задачное творчество: от решения задач к их составлению

Вот уже второй год учащиеся сначала 5-х, а теперь 6-х классов ФМШ № 2007 г. Москвы один раз в неделю решают «пятёрочки» задач, подобранные или специально составленные учителем. «Юбилейный» 10-й листок с «пятёрочками» задач Касимов Илья предложил отметить включением в него задач, составленных учащимися. А как составить задачу? Помог случай.

Незадолго до этого после получения «тройки» по русскому языку он пытался разблокировать электронный замок, который его папа поставил на айфон. Замок оказался интересным. После каждой неудачной попытки, начиная с шестой, он добавлял — сначала секунду ожидания, потом две, потом четыре... Илья задумал составить задачу на тему замка с секретом. Первый её вариант был про четырёхзначный код, что приводило к большим вычислениям. Мы его упростили, и вот что получилось.

1. *Касимов И.* Миллионер Кирилла Петрович хранит деньги в сейфе с двузначным цифровым кодовым замком (цифры от 0 до 9). Вор Вася пытается подобрать код замка, но после пятой попытки замок отключился на 1 сек., после шестой попытки — на 2 сек. (каждое следующее отключение длилось в два раза дольше предыдущего). Сможет ли Вася открыть замок, если первые 40 попыток будут неудачными?

Решение. Перед 6-й, 7-й, 8-й, 9-й, ..., 39-й и 40-й попытками время отключения составило 1 с, 2 с, 2^2 с, 2^3с, ..., 2^{33}с, 2^{34}с. (показатель степени двойки на 6 меньше номера попытки). Выразим время ожидания перед 40-й попыткой в годах, помня, что 1 минута = 60 с, 1 час = 60 минут, сутки = 24 час, 1 год в среднем = 365,25 суток:

$$2^{34} = \frac{2^{34}}{60\cdot 60\cdot 24\cdot 365{,}25} = \frac{2^4\cdot 2^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^{10}}{6\cdot 6\cdot 24\cdot 36525} = \frac{16\cdot 1024\cdot 1024\cdot 1024}{6\cdot 6\cdot 24\cdot 36525} =$$

$$= \frac{1024\cdot 1024\cdot 1024}{1972350} > \frac{1000\cdot 1000\cdot 1000}{2000000} = 500.$$

Очевидно, Вася не сможет дождаться 40-й попытки — столь долго люди пока не живут.

Замечание. Интересно, что суммарное время ожидания окажется примерно в 2 раза больше. Оно равно $t = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{33} + 2^{34}$.

Если умножить это равенство на 2, то получим новое равенство:

$$2t = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{34} + 2^{35}.$$

Если из второго равенства вычесть первое, то получим третье равенство:

$$t = 2^{35} - 1.$$

Мы получили время в секундах примерно в 2 раза большее, чем 2^{34}.

Ответ. Нет, открыть замок Вася не успеет…

Особенно популярными у юных составителей задач были задачи на разрезание фигур.

2. *Иванов А.* Разрежьте фигуру на 6 равных частей по линиям клетчатой бумаги (рис. 16).

3. *Дорохов Г.* Разрежьте фигуру на 6 равных частей по линиям клетчатой бумаги (рис. 17).

4. *Юнусов Т.* Разрежьте фигуру на 5 равных частей по линиям клетчатой бумаги (рис. 18).

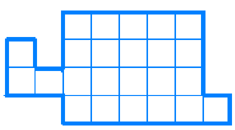
Рис. 16

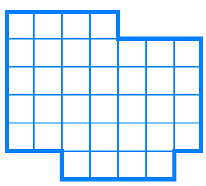
Рис. 17

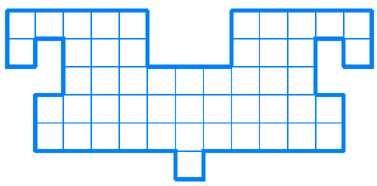
Рис. 18

5. *Галанина М.* Разрежьте фигуру (рис. 19) на 6 равных частей по линиям клетчатой бумаги так, чтобы из них можно было сложить квадрат 6x6 в трёхцветной шахматной раскраске.

6. *Ахмедова Е.* По линейкам клетчатой бумаги квадрат 4x4 можно разрезать на три фигуры *a*, *b* и *c*. Разрежьте вторую фигуру на три фигуры: *a* + *b*, *a* + *c*, *b* + *c* (рис. 20). Фигура *a* + *b* составлена из фигур *a* и *b*, имеющих общую границу. Аналогично получаются фигуры *a* + *c* и *b* + *c*.

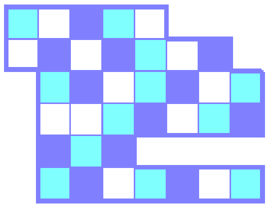

Рис. 19

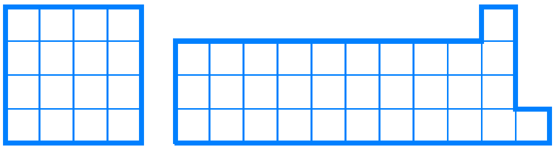

Рис. 20

7. *Юнусов Т.* Квадрат со стороной 3 000 разрезали на одинаковое количество фигур *a* и *b* (рис. 21). Сколько фигур каждого вида получилось?

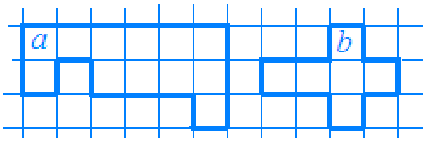

Рис. 21

Отдавая дань нашему общему увлечению головоломкой «Пентамино 6x10», один из наших чемпионов по числу найденных решений составил такую задачу.

8. *Кулямин А.* Сложите прямоугольник 7x9 из всех 12-ти фигур пентамино (из них сложен прямоугольник на рис. 22) и одной из двух фигур тримино.

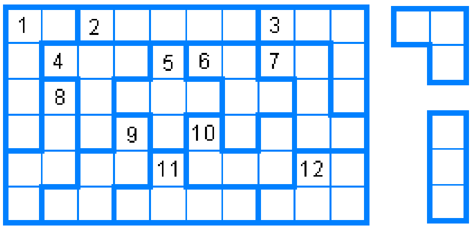

Рис. 22

А вот задачи на шахматной доске.

9. *Касимов И.* В некотором царстве, в некотором государстве играют в свои шахматы на доске 6x6. Их шахматная фигура пони ходит на соседнее поле по горизонтали или вертикали (например, a1 – b1 или a1 – a2). Подсчитайте число способов, с помощью которых пони может с поля a1 добраться до поля f6, если будет двигаться только вправо или вверх (рис. 23).

Решение. Пони может попасть на поле b1, a2 единственным способом. Впишем число 1 в каждое поле, куда можно попасть единственным способом из соседнего поля (рис. 24). В каждое следующее поле впишем число, показывающее, сколькими способами можно попасть на это поле. Продолжив эту работу, убедитесь, что на поле f6 можно попасть 256-ю способами.

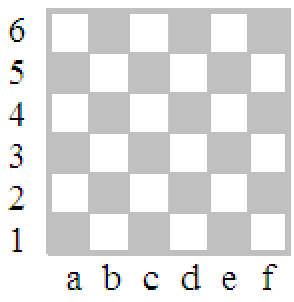

Рис. 23

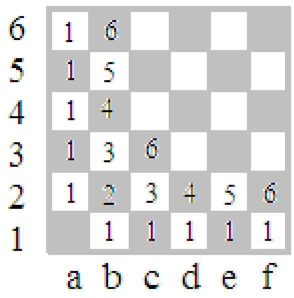

Рис. 24

Ответ. 256 способов.

10. За какое наименьшее число ходов шахматная фигура конь может с поля a1 добраться до поля h8 на обычной шахматной доске?

Решение. *Ахмедова Е.* Заменим буквы цифрами (рис. 25), тогда каждое поле получит две числовые координаты — первая по горизонтали, вторая — по вертикали. Каждое поле получит свою сумму координат (она вписано в поле), например поле h8 получит сумму координат 8 + 8 = 16. Заметим, что первоначально конь стоит на поле с суммой координат 2 и за один ход (при движении вправо и вверх — иначе не получится наименьшее число ходов) увеличивает сумму координат на 3. В этом случае за 4 хода сумма координат может увеличиться только на 12 и стать равной 14, но не может стать равной 16. Следовательно, на поле f6 конь попадёт не ранее 5-го хода. Но и за 5 ходов он не попадет на поле h8, так как каждый нечетный ход приводит коня на белое поле. Итак, меньше, чем за 6 ходов задача не решается. На рисунке 26 показано решение задачи за 6 ходов.

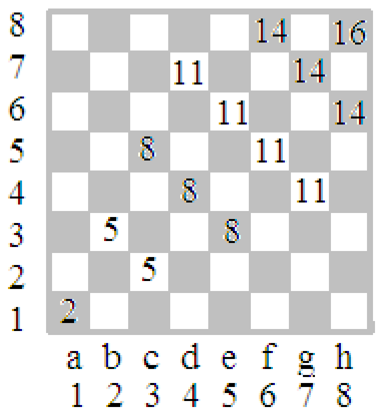

Рис. 25

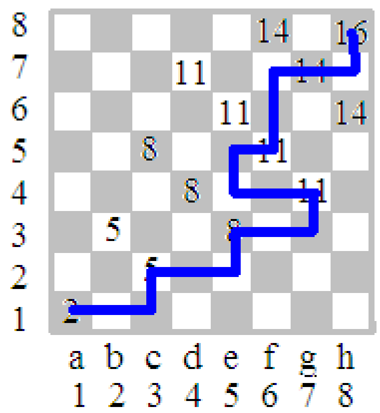

Рис. 26

11. *Кулямин А.* Сумма трёх первых цифр 2013 года равна последней цифре. Сколько следующих лет в третьем тысячелетии обладают тем же свойством?

Решение. Выпишем все годы, начиная с 2013-го, обладающие указанным свойством:

2013, 2103 — 2 года,
2024, 2114, 2204 — 3 года,
2035, 2125, 2215, 2305 — 4 года,
2046, 2136, 2226, 2316, 2406 — 5 лет,
2057, 2147, 2237, 2327, 2417, 2507 — 6 лет,
2068, 2158, 2248, 2338, 2428, 2518, 2608 — 7 лет,
2079, 2169, 2259, 2349, 2439, 2529, 2619, 2709 — 8 лет.

В третьем тысячелетии (до 3000 г. включительно) имеется 34 года, следующих за 2013 годом и обладающих требуемым свойством.

Замечание. Филатова Е. считала годы иначе, фиксируя вторую цифру года: если вторая цифра 0, то получим годы 2024, 2035, ..., 2079 (первый столбик в приведённой выше таблице) и т. д.

Ответ. 34 года.

Решения задач

2. См. рис. 27.

3. Здесь нашлись два разных способа разрезания (рис. 28).

4. См. рис. 29.

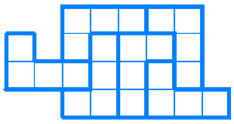

Рис. 27

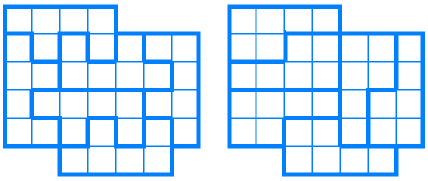

Рис. 28

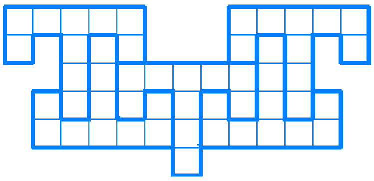

Рис. 29

5. См. рис. 30.

6. На рисунке 31 показан один из найденных способов разрезания.

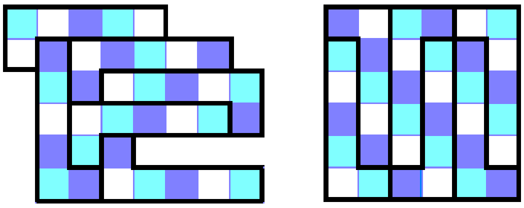

Рис. 30

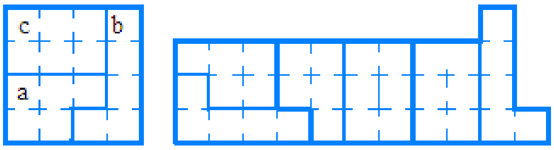

Рис. 31

7. Квадрат со стороной 6 можно сложить из двух фигур *a* и двух фигур *b* (рис. 32). Вдоль одной стороны квадрата со стороной 3 000 можно уложить 500 квадратов составленных из четырёх фигур *a* и *b*, а всего 250 000 таких квадратов. Всего получится 500 000 фигур каждого вида.

8. Одно из возможных решений изображено на рисунке 33.

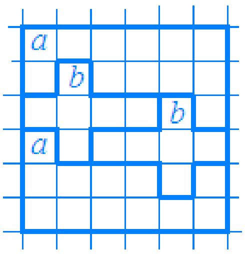

Рис. 32

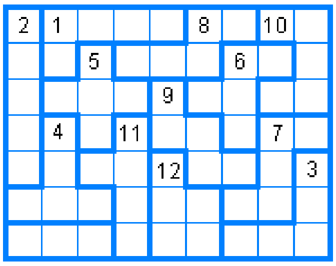

Рис. 33