

10. Статистика, вероятности

Теория вероятностей

Вероятность – доля успеха того или иного события.

Классическое определение вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{количество всех возможных исходов}}$$

Опыт №1: бросание игральной кости

Исходы (равновозможные элементарные события): {1; 2; 3; 4; 5; 6} $n = 6$

События: А – выпадение 2-х очков

В – выпадение четного числа очков

С – выпадение менее 7-ми очков

Д – выпадение 8-ми очков

Вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad \begin{array}{l} m = 1: \{2\} \\ n = 6: \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \end{array} \quad \begin{array}{l} A - \text{случайное событие} \\ 0 < P(A) < 1 \end{array}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} m = 3: \{2; 4; 6\} \\ n = 6: \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \end{array} \quad \begin{array}{l} B - \text{случайное событие} \\ 0 < P(B) < 1 \end{array}$$

$$P(C) = \frac{6}{6} = 1 \quad \begin{array}{l} m = 6: \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \\ n = 6: \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \end{array} \quad \begin{array}{l} C - \text{достоверное событие} \\ P(C) = 1 \end{array}$$

$$P(D) = \frac{0}{6} = 0 \quad \begin{array}{l} m = 0: \emptyset \\ n = 6: \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \end{array} \quad \begin{array}{l} D - \text{невозможное событие} \\ P(D) = 0 \end{array}$$

Опыт №2: бросание двух монет

Исходы: {ОО; ОР; РО; РР} $n = 4$

События: А – оба раза выпадет «орел»

В – «решка» выпадет более одного раза

С – «решка» выпадет не более одного раза

Д – «орел» выпадет ровно один раз

Вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad \begin{array}{l} m = 1: \{ОО\} \\ n = 4: \{ОО; ОР; РО; РР\} \end{array} \quad P(D) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} m = 2: \{ОР; РО\} \\ n = 4: \{ОО; ОР; РО; РР\} \end{array}$$

$$P(B) = \frac{1}{4} \quad \begin{array}{l} m = 1: \{РР\} \\ n = 4: \{ОО; ОР; РО; РР\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{События В и С – противоположные} \\ P(B) + P(C) = 1 \end{array}$$

$$P(C) = \frac{3}{4} \quad \begin{array}{l} m = 3: \{ОО; ОР; РО\} \\ n = 4: \{ОО; ОР; РО; РР\} \end{array}$$

Элементы комбинаторики

Правило произведения: Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует различных $n \cdot m$ пар с выбранными первым и вторым элементами.

Опыт №3: бросание трех монет

Количество исходов: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Исходы: {ООО; ООР; ОРО; ОРР; РОО; РОР; РРО; РРР} $n = 8$

События: А – «орел» выпадет ровно два раза

В – «орел» выпадет не менее одного раза

Вероятности:

$$P(A) = \frac{3}{8} \quad \begin{array}{l} m = 3: \{ООР; ОРО; РОО\} \\ n = 8: \{ООО; ООР; ОРО; ОРР; РОО; РОР; РРО; РРР\} \end{array}$$

$$P(B) = \frac{7}{8} \quad \begin{array}{l} m = 7: \{ООО; ООР; ОРО; ОРР; РОО; РОР; РРО\} \\ n = 8: \{ООО; ООР; ОРО; ОРР; РОО; РОР; РРО; РРР\} \end{array}$$

Опыт №4: выбор трехзначного числа

Количество исходов: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ (на первом месте не может стоять «0»)

Исходы: {100; 101; ...; 998; 999} $n = 900$

События: А – выбранное трехзначное число делится на 5

В – выбранное трехзначное число делится на 24

Вероятности:

$$P(A) = \frac{180}{900} = \frac{1}{5} \quad \begin{array}{l} m = 180: \{9 \cdot 10 \cdot 2 = 180\} \\ n = 900: \{100; 101; \dots; 998; 999\} \end{array} \quad \text{последняя цифра «0» или «5»}$$

$$P(B) = \frac{37}{900} \quad \begin{array}{l} m = 37: \left\{ 100 \leq 24k \leq 999, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4\frac{1}{6} \leq k \leq 41\frac{5}{8} \Rightarrow k = 41 - 4 = 37 \right\} \\ n = 900: \{100; 101; \dots; 998; 999\} \end{array}$$

Сложение и умножение вероятностей

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Теорема 2. Для независимых событий справедливо: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Произведением событий А и В называется событие АВ, состоящее в том, что происходят оба этих события.

Два события называются **независимыми**, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого.

Опыт №5: бросание двух игральных костейКоличество исходов: $6 \cdot 6 = 36$

Исходы:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

События:

А – сумма выпавших чисел равна 7 или 8

В – выпало хотя бы одно число, большее 4

 A_1 – сумма выпавших чисел равна 7 A_2 – сумма выпавших чисел равна 8

Вероятности:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$$

$$P(B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \quad \begin{matrix} m = 20 \\ n = 36 \end{matrix}$$

Опыт №6: стрельба по мишени (известна вероятность попадания)Вероятность попадания при одном выстреле: $P = 0,7$.

События:

А – стрелок выстрелил и попал

 \bar{A} – стрелок выстрелил и не попал (промахнулся)

В – стрелок три раза выстрелил: в первый раз попал, а потом два раза не попал (промахнулся)

С – стрелок из четырех выстрелов не попал ни разу

Вероятности:

$$P(A) = 0,7$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3 \quad (\text{события } A \text{ и } \bar{A} \text{ – противоположные, } P(A) + P(\bar{A}) = 1)$$

$$P(B) = P(A) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,063 \quad (\text{каждое попадание/промах – независимое событие})$$

$$P(C) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0081 \quad (\text{каждый промах – независимое событие})$$

Опыт №7: покупка лотерейного билета (дана вероятность выигрыша)

Вероятность получить главный приз равна 0,0001,
поощрительный приз – 0,0009.

События:

A – купленный билет «выиграет»

\bar{A} – купленный билет «не выиграет»

Вероятности:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0,0001 + 0,0009 = 0,001, \text{ где}$$

A_1 – купленный билет «выиграет главный приз»

A_2 – купленный билет «выиграет поощрительный приз»

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,001 = 0,999 \text{ (события } A \text{ и } \bar{A} \text{ – противоположные)}$$

Статистика**Статистическое определение вероятности:**

$$P(A) \approx W(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{количество успешных опытов (частота события } A)}{\text{количество всех опытов}}$$

$W(A)$ – относительная частота события A

Опыт №8: выбор ручки (известны статистические данные)

В среднем из 200 ручек три бракованные.
Какова вероятность купить хорошую ручку?

События:

A – выбранная ручка бракованная

\bar{A} – выбранная ручка небракованная (хорошая)

Вероятность:

$$P(A) \approx W(A) = \frac{3}{200} = 0,015 \quad \begin{matrix} n_A = 3 \\ n = 200 \end{matrix} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,015 = 0,985$$

Опыт №9: бросание монеты 100 раз

Монету подбросили 100 раз, «орел» выпал 52 раза. Насколько относительная частота выпадения «орла» отличается от вероятности этого события?

Событие A – выпадет «орел»

Вероятность:

Относительная частота:

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} m = 1: \{O\} \\ n = 2: \{O; P\} \end{matrix} \quad W(A) = \frac{52}{100} \quad \begin{matrix} n_A = 52 \\ n = 100 \end{matrix}$$

$$W(A) - P(A) = \frac{52}{100} - \frac{1}{2} = \frac{52}{100} - \frac{50}{100} = \frac{2}{100} = 0,02$$