Лекция 1. Комбинаторные формулы и определения вероятности

ВВЕДЕНИЕ

СТОХАСТИКА СЕГОДНЯ . Начиная со второй половины прошлого века наблюдается все более возрастающий интерес к теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и к применению вероятностно-статистических методов в самых разнообразных областях науки, техники, производства и экономики. Изучение различного рода случайных явлений, стохастических отклонений от нормы является важным средством предотвращения чрезвычайных ситуаций, техногенных катастроф, выпуска некачественной и ненадежной продукции и т.п.

Методы теории вероятностей и математической статистики находят все большее применение, например, к анализу ошибок разного рода измерений, а также в физике, биологии, экологии, социологии, в телефонии и процессах обслуживания, адаптивного управления и т. д.

По этой причине ***стохастические знания становятся неотъемлемым компонентом содержания образования*** – как общего, так и профессионального. Без минимальной вероятностно-статистической грамотности нельзя в наши дни адекватно воспринимать разнообразную социальную, политическую, экономическую информацию, выдвигать и оценивать гипотезы и принимать обоснованные решения. Без соответствующей подготовки невозможно полноценное изучение естественнонаучных и социально-экономических дисциплин уже в средней школе.

СТОХАСТИКА В ШКОЛЕ. Современная концепция школьного математического образования ориентирована, прежде всего, на учет индивидуальности ребенка, его интересов и склонностей. И с этой точки зрения, когда речь идет не только об обучении математике, но и формировании личности с помощью математики, необходимость развития у всех школьников вероятностной интуиции и статистического мышления становится насущной задачей. ***Изучение вероятностно-статистического материала необходимо уже в обязательном школьном курсе в рамках самостоятельной содержательно-методической линии на протяжении всех лет обучения***. Этим объясняется одна из важнейших особенностей стандарта математического образования – включение в него нового для нашей школы материала – элементов стохастики.

Стохастическая линия строится как объединение трех взаимосвязанных составляющих – элементов комбинаторики, теории вероятностей и статистики и включается в обучение как в основной, так и в старшей школе.

Образовательный стандарт предписывает необходимость формирования у учащихся прагматической компетентности, которая предполагает, в частности,

-способность применять классическую, статистическую и геометрическую модели вероятности при решении прикладных и практических задач,

-умение прогнозировать наступление событий на основе статистики и вероятности;

-использовать полученные умения для решения задач в смежных дисциплинах.

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий задачи нахождения количества всевозможных конечных подмножеств данного множества, если эти подмножества обладают заданной характеристикой.

Теория вероятностей – это математическая наука, предметом которой является изучение закономерностей массовых случайных явлений.

Математическая статистика–
раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. *ПРИНЦИП УМНОЖЕНИЯ.* Простейшая комбинаторная задача – найти число всевозможных пар вида (g_1, g_2), где $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$.

Например, брошены два игральных кубика. Найти количество всевозможных вариантов (всевозможных пар) очков на выпавших гранях.

Решение. Следует найти количество всех упорядоченных пар (g_1, g_2). Значение g_1 - любое из чисел $1,2,...,6$. В паре с фиксированным (выбранным) g_1 может оказаться любое $g_2 \in \{1,2,...,6\}$, т.е. таких пар будет 6, соответственно количеству возможных значений g_2. Учитывая, что выбор g_1 возможен тоже шестью способами, имеем все упорядоченные пары в количестве $6 \cdot 6 = 36$.

В общем случае справедлива

Теорема 1 ("принцип умножения"). Имеет место равенство

$$\nu(G_1 \times G_2) = \nu(G_1) \cdot \nu(G_2).$$

Здесь символом обозначено число всех элементов соответствующего множества, а через $G_1 \times G_2$ - совокупность всех рассматриваемых упорядоченных пар (так называемое декартово произведение множеств).

2. Усложним задачу: найти $\nu(M)$, т.е. количество элементов конечного множества M , состоящего из всевозможных наборов $g = (g_1,..., g_n)$.

Обобщая результат теоремы 1, имеем

Теорема 2 ("принцип умножения"). Число всевозможных упорядоченных наборов из n элементов

$$\nu(G_1 \times \ldots \times G_n) = \nu(G_1) \cdot \ldots \cdot \nu(G_n).$$

Одна из интерпретаций этого результата: если имеется k *экземпляров одного и того же множества* G и требуется найти число упорядоченных наборов длины k в которые входит *по одному* (и только одному) элементу из каждого экземпляра, то

$$\nu(G^k) = m^k,$$

где m – число элементов во множестве G.

Пример. Какое максимальное число шестизначных телефонных номеров может быть в городской телефонной сети ?

Решение. Имеем упорядоченные наборы длины k=6 , в которых каждый элемент принадлежит множеству $G=\{0,1,2,...,9\}$, содержащему m=10 элементов. Следовательно, число таких наборов $\nu(G^6) = 10^6$. Однако телефонного номера, состоящего сплошь из нулей, обычно не бывает. Следовательно, искомое число номеров равно $10^6 - 1$=999999.

Другая интерпретация результата. Имеются несколько совместно проводимых опытов. Известно количество исходов каждого опыта. Тогда число исходов совместно проведенных опытов получается перемножением количеств исходов каждого из них.

Например, при подбрасывании 4-х монет имеется 2х2х2х2=16 различных вариантов выпадения «орлов» и «решек».

2. *РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ*

1) Рассмотрим произвольную совокупность из N элементов и всевозможные выборки (подмножества), содержащие k элементов; $1 \le k \le N$.

Упорядоченные выборки (важен порядок следования элементов в наборе) называют размещениями; число всевозможных размещений из N по k элементов вычисляется по формуле

$$A_N^k = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

В частности, размещения из N по N элементов называют перестановками; число всевозможных перестановок

$$P_N = N!$$

Неупорядоченные выборки (порядок следования элементов неважен) называют сочетаниями; число всевозможных сочетаний из N по k есть

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!};$$

Здесь использовано обозначение $m!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m-1)m$; считаем 0!=1!=1.

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Сколькими способами можно разложить в ряд на витрине магазина пять DVD-дисков?

Решение. Ищем количество перестановок из 5 элементов

$$P_5 = 5!=120.$$

Пример 2. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг, если
а) две определенные книги должны всегда стоять рядом,
б) эти две книги не должны стоять рядом?

Решение. а) Пару книг, которые должны стоять рядом, условимся пока рассматривать как одну книгу. Тогда нужно расставить 5 книг по пяти местам, что можно сделать $P_5 = 5!$ способами. Учитывая теперь порядок расположения тех двух книг, которые мы посчитали за одну, имеем P_2 перестановок между ними. Согласно принципу умножения, получаем окончательно число способов $P_5 \times P_2 = 120\times 2 = 240$.

б) Способов переставить 6 книг существует $P_6=720$, но из них, как установлено в п.а) существует 240 способов поставить определенные книги вместе. Следовательно, число способов поставить книги так, чтобы 2 заданные книги не стояли, равно разности 720-240=480.

Пример 3. На заседании Думы из 6 возможных кандидатов выбирают председателя комитета , его первого и второго заместителя. Сколько существует способов формирования руководящего состава этого комитета?

Решение. Имеем упорядоченные тройки, составленные из элементов множества G , для которого $\nu(G)=6$. Следовательно, ищем количество размещений A_6^3:

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!} = 120$$

Пример 4. Имеется 10 различных игрушек, из которых формируют комплекты подарков по три игрушки в каждом. Сколько таких различных комплектов можно сформировать?

Решение. Имеем всевозможные неупорядоченные подмножества по 3 элемента из 10. Следовательно, ищем количество сочетаний, т.е.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!.} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3!7!} = 120.$$

Итак, можно сформировать 120 различных комплектов подарков.

4. *ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ*

1.Логин должен начинаться с английской буквы S и состоять из четырех букв (в английском алфавите 26 букв). Сколько можно образовать таких логинов,

если
а)все буквы в нем должны быть различными;
б)буквы могут повторяться.

2. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из четырех цифр, если первая из них не равна нулю?

3. Из восьми депутатов надо выбрать председателя счетной комиссии и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

4. Сколько существует различных перестановок букв в слове «дорога» ?

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основными понятиями теории вероятностей являются понятия *события и его вероятности.* События можно разбить на три категории: достоверные (наверняка происходящие при выполнении данного комплекса условий; достоверные события обозначаем символом E), невозможные (наверняка не происходящие; невозможные события обозначаем символом $\varnothing$) и случайные (могут как произойти, так и не произойти при выполнении данного комплекса условий; обозначения: $A,B,C,\dots$).

Вероятность понимается как некоторая численная мера степени объективной возможности появления данного события, т.е. каждому событию A сопоставляется (единственным образом) некоторое число $P = P(A)$.

1.*СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ*

1.Во множестве событий вводятся следующие действия.

Сложение событий. Событие $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ называется суммой конечного количества событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, если событие А состоит в наступлении хотя бы одного из указанных $A_k, k = 1,\dots,n.$

Умножение событий. Событие $B = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ называется произведением конечного количества событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, если событие А, состоит в совместном наступлении всех указанных $A_k, k = 1,\dots,n.$

2. События A_1, A_2 называются ***несовместными***, если $A_1 \cdot A_2 = \varnothing$.
Другими словами, два события несовместны, если в результате опыта наступление одного из них исключает наступление другого.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются ***попарно несовместными***, если любые два из них несовместны.

3. Говорят, что события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют ***полную группу***, если

$$A_1 + A_2 + ...A_n = E.$$

Другими словами, события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, если в результате опыта наступление хотя бы одного из них является достоверным.

4. События A и $\overline{A}$ называются ***противоположными***, если они несовместны и образуют полную группу: $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = E$.

2. *КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ*

1. Будем рассматривать события *A, B, C*, ... как исходы некоторого опыта; число исходов считаем конечным. Каждому опыту сопоставим множество всех его ***элементарных*** (простейших, «неразложимых») ***исходов*** которое дает полную информацию о предполагаемых результатах этого опыта.

Элементарными называются такие исходы опыта, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) ***группа исходов полна***, т.е. обязательно произойдет хотя бы один из них;

б) исходы попарно ***несовместны***;

в)все– ***равновозможны***, т.е. объективно ни один из исходов не является более возможным, чем любой другой.

2. Среди элементов множества Ω имеются исходы, ***благоприятствующие*** событию *A*, то есть те, в результате которых событие *A* наступает.

Классической вероятностью события *A* называется отношение числа $m = m_A$ элементарных исходов, благоприятствующих *A*, к общему числу n всевозможных элементарных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{2.1}$$

Для вычисления количества всевозможных и благоприятных исходов опыта часто пользуются формулами комбинаторики.

Очевидны следующие свойства классической вероятности:

$$P(E) = 1, \quad P(\varnothing) = 0, \tag{2.2}$$

$$0 < P(A) < 1 \text{ для всякого случайного события } A. \tag{2.3}$$

Действительно, в первом случае все исходы благоприятны, т.е. $m_E = n$, а во втором $m_\varnothing = 0$, так что соотношения (2.2) – в силу определения (2.1) – очевидны; наконец, $0 < m_A < n$ для всякого случайного события A, а поэтому оценка (2.3) имеет место.

3. *ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ*

1. Это понятие вводится в результате анализа проведенных опытов. Если в результате n опытов событие А появилось $m = m_A$ раз, то относительной частотой события *А* называют число

$$W(A) = W_n(A) = \frac{m}{n}.$$

2. Практика показывает, что с ростом числа однотипных опытов относительная частота приобретает свойство устойчивости, колеблясь относительно некоторого числа $P = P(A)$, которое называется статистической вероятностью события А.

3. Очевидно, что, относительная частота W(A) удовлетворяет свойствам, аналогичным (2.2), (2.3); в частности, $0 \le W(A) \le 1$.

4. *ПРИМЕРЫ.*

Пример 1. Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события *А*, состоящего в том, что суммарное число выпавших очков не будет превосходить 4.

Р е ш е н и е. Элементарные исходы опыта можно интерпретировать как пары чисел (1, 1), (1, 2),…; попарная несовместность, полнота группы и равновозможность исходов очевидны. Найдем общее число исходов опыта n: n=36. Число благоприятствующих событию *А* исходов
исходов найдем простым их перебором: 1+1, 1+2, 1+3, 2+1,
2+2, 3+1, т.е. m_A=6. Следовательно, на основании определения классической вероятности

$$P(A) = \frac{6}{36}, \quad \text{т.е. } P(A) = \frac{1}{6}.$$

Пример 2. На экзамене 40 вопросов. Дима не выучил 6 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

Решение. Имеем искомую вероятность в виде (40-6)/40=0,85

Пример 3. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

Решение. Равновозможны 4 исхода эксперимента: орел-орел, орел-решка, решка-орел, решка-решка. Орел выпадает ровно один раз в двух случаях:

орел-решка и решка-орел. Поэтому вероятность того, что орел выпадет ровно 1 раз, равна
$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Пример 4. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение.

На третий день запланировано $\frac{80-8}{4}=18$ выступлений. Значит, вероятность того, что выступление представителя из России окажется запланированным на третий день конкурса, равна
$\frac{18}{80}=0{,}225.$

Ответ: 0,225.

Пример 5. В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

Решение.

Из 5000 тысяч новорожденных 5000 − 2512 = 2488 девочек. Поэтому частота рождения девочек равна

$$\frac{2488}{5000}=0{,}4976\approx 0{,}498.$$

Ответ: 0,498.