Лекция 2. Вероятность. Теоремы о вероятности

1. *КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ*

1. Будем рассматривать события *A, B, C*, ... как исходы некоторого опыта; число исходов считаем конечным. Каждому опыту сопоставим множество всех его ***элементарных*** (простейших, «неразложимых») ***исходов*** которое дает полную информацию о предполагаемых результатах этого опыта.

Элементарными называются такие исходы опыта, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) ***группа исходов полна***, т.е. обязательно произойдет хотя бы один из них;

б) исходы попарно ***несовместны***;

в)все– ***равновозможны***, т.е. объективно ни один из исходов не является более возможным, чем любой другой.

2. Среди элементов множества Ω имеются исходы, ***благоприятствующие*** событию *A*, то есть те, в результате которых событие *A* наступает.

Классической вероятностью события A называется отношение числа $m = m_A$ ***элементарных исходов, благоприятствующих A, к общему числу n всевозможных элементарных исходов опыта:***

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.1)$$

Для вычисления количества всевозможных и благоприятных исходов опыта часто пользуются формулами комбинаторики.

Очевидны следующие свойства классической вероятности:

$$P(E) = 1, \quad P(\varnothing) = 0, \qquad (2.2)$$

$$0 < P(A) < 1 \text{ для всякого случайного события } A. \qquad (2.3)$$

Действительно, в первом случае все исходы благоприятны, т.е. $m_E = n$, а во втором $m_\varnothing = 0$, так что соотношения (2.2) – в силу определения (2.1) – очевидны; наконец, $0 < m_A < n$ для всякого случайного события A, а поэтому оценка (2.3) имеет место.

2. *ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ*

1. ***Это понятие вводится в результате анализа проведенных опытов. Если в результате n опытов событие А появилось*** $m = m_A$ ***раз, то относительной частотой события А называют число***

$$W(A) = W_n(A) = \frac{m}{n}.$$

2. Практика показывает, что с ростом числа однотипных опытов относительная частота приобретает свойство устойчивости, колеблясь относительно некоторого числа $P = P(A)$, которое называется статистической вероятностью события А.

3. Очевидно, что, относительная частота W(A) удовлетворяет свойствам, аналогичным (2.2), (2.3); в частности, $0 \le W(A) \le 1$.

3. *ПРИМЕРЫ.*

Пример 1. Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события A, состоящего в том, что суммарное число выпавших очков не будет превосходить 4.

Решение. Элементарные исходы опыта можно интерпретировать как пары чисел (1, 1), (1, 2),…; попарная несовместность, полнота группы и равновозможность исходов очевидны. Найдем общее число исходов опыта n: n=36. Число благоприятствующих событию A исходов
исходов найдем простым их перебором: 1+1, 1+2, 1+3, 2+1,
2+2, 3+1, т.е. m_A=6. Следовательно, на основании определения классической вероятности

$$P(A) = \frac{6}{36}, \quad \text{т.е. } P(A) = \frac{1}{6}.$$

Пример 2. На экзамене 40 вопросов. Дима не выучил 6 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

Решение. Имеем искомую вероятность в виде (40-6)/40=0,85

Пример 3. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.
Решение. Равновозможны 4 исхода эксперимента: орел-орел, орел-решка, решка-орел, решка-решка. Орел выпадает ровно один раз в двух случаях:

орел-решка и решка-орел. Поэтому вероятность того, что орел выпадет ровно 1 раз, равна

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 4. Вероятность того, что новый блендер в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,096. В некотором городе из 1000 проданных блендеров в течение года в гарантийную мастерскую поступило 102 штуки. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Решение. Если событие А – поступление блендера в гарантийный ремонт, то по результатам статистики, его относительная частота

W(A)=102/1000, т.е. 0,102. Отличие от вероятности того же события составит тогда 0,102-0,096=0,006.

В ряде задач требуется найти вероятность расположения объекта (объектов) на данном месте или в данной группе. Обычно бывает неважно, каково расположение указанного места (указанной группы) в списке объектов (групп). Важно лишь количество всех претендентов на данное место (состав данной группы), т.е. число всех элементарных исходов и число, так сказать, «благоприятных» претендентов или мест (число благоприятных элементарных исходов). Продемонстрируем это обстоятельство в следующих примерах.

Пример 5. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение. Здесь важно лишь то, что в третий день третий день запланировано $\frac{80-8}{4} = 18$ выступлений и не принципиально, что это именно третий день (а не второй, не четвертый, не пятый). Число всевозможных претендентов на данный день n=80 (число всех элементарных исходов опыта). А число, так сказать, «благоприятных» для россиянина мест m=18. Теперь вероятность того, что выступление представителя из России окажется запланированным на третий день конкурса, равна

$$\frac{18}{80} = 0,225.$$

Ответ: 0,225.

Пример 6. В классе 28 человек, среди них два друга — Сергей и Олег. Класс случайным образом делят на четыре равные группы. Найдите вероятность того, что оба друга окажутся в одной группе.

Решение. Снова не принципиально, в какой именно группе окажутся друзья: скажем, Сергей оказался во второй группе. Всего «претендентов» на место в ней может быть n=27 человек (28 «минус Сергей»). Тогда число благоприятных мест в этой же группе (куда хочет попасть Олег) равно 28:4 и «минус Сергей», т.е m=6. Значит, вероятность события А, состоящего в том, что друзья окажутся в одной группе Р(А)=6:27 или р(А)= 2/9.

Пример 7. За круглым столом 9 мест. За него случайным образом рассаживают 7 мальчиков и двух девочек, Олю и Лену. Какова вероятность, что девочки окажутся рядом.

Решение. При « произвольном фиксированном» расположении Оли для Лены имеется 9-1=8 возможных исходов, среди которых m=2 благоприятных (расположение слева или справа от Оли). Значит, искомая вероятность равна 2/8 или 0,25.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Образуют ли полную группу следующие события: A – два попадания в мишень при двух выстрелах, B – ни одного попадания при тех же двух выстрелах ?

2. Рассматриваются следующие события: A – первое из полученных электронных писем содержит навязчивую рекламу (СПАМ), B – второе письмо содержит СПАМ. Выразить с помощью операций сложения и умножения через события A и B и (или) им противоположные следующие события а) событие С – ни одно из писем не содержит СПАМ;
б) хотя бы одно письмо содержит СПАМ;
в) только одно письмо содержит СПАМ.

3. В случайном эксперименте бросают три игральных кубика. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 15. Результат округлите до тысячных.

4. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 5 спортсменов из Японии, 4 спортсмена из Кореи, 9 спортсменов из Китая и 7 — из Индии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Индии.

5. В группе туристов 32 человека. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 4 человека за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист У. полетит третьим рейсом вертолёта.

6. Ослик Иа-Иа уверен, что с днем рождения его поздравят Вини-Пух, Пятачок, Сова и Тигра. Какова вероятность, что первым прибежит его поздравить Пятачок (увы, с уже лопнувшим воздушным шариком), если равновозможны визиты с утра любого из его четырех друзей? (Ответ: ¼)

5. ВЕРОЯТНОСТИ «СОСТАВНЫХ» СОБЫТИЙ

Рассмотрим теперь ситуации, когда случайное событие может быть подвергнуто декомпозиции: выражено через операции сложения, умножения и отрицания (перехода к противоположному событию) более простых событий – результатов единичного опыта. Имеют место следующие основные формулы.

1)*Вероятность произведения есть*

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B),$$

где $P_A(B)$ означают вероятность события В, вычисленную при условии, что А произошло (условная вероятность события В).

Результат может быть распространен и на большее количество событий, например,

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C).$$

В связи с этими формулами обычно выделяют случай независимых событий: два события А и В называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, наступило ли другое событие, т.е. эта вероятность абсолютно постоянна в условиях данных опытов.

Аналогично, события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если каждая из вероятностей $P_j = P(A_j)$ остается абсолютно постоянной в условиях данных опытов. Для n событий, независимых в совокупности,

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n);$$

в частности, для двух независимых событий

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

2) *Вероятность суммы двух несовместных событий* вычисляется по формуле

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2).$$

3) *Вероятность суммы двух совместных событий* вычисляется по формуле

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2).$$

Вероятность суммы n попарно несовместных событий вычисляется в виде

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n);$$

для случая же совместимости любой пары событий имеем

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}).$$

4) Если $A,\overline{A}$ - пара противоположных событий, то справедливо равенство

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Пример 1. На склад поступают детали заводов № 1 и № 2. Первый завод производит 80% стандартных изделий, завод № 2 – 60%. Наудачу взяли по одной детали каждого завода. Найти вероятности следующих событий: а) обе детали стандартны; б) хотя бы одна деталь стандартна.

Р е ш е н и е. а) Событие A – обе детали стандартны. Введем события A_1 – произведенная заводом № 1 деталь стандартна, A_2 – деталь завода № 2 стандартна; следовательно, $A=A_1A_2$. События A_1 и A_2, очевидно, независимы; поэтому

$$P(A)=P(A_1)P(A_2)=0{,}8\cdot0{,}6=0{,}48.$$

б) C – хотя бы одна деталь стандартна; очевидно, что $C = A_1 + A_2$, причем события A_1 и A_2 – совместны; следовательно

$$P(C)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)=0{,}8+0{,}6-0{,}48=0{,}92.$$

Пример 2. Блок в электрической схеме содержит два параллельно соединенных элемента, причем первый может пропускать ток (исправен) с вероятностью 0,9, а второй – с вероятностью 0,8. Какова вероятность, что исправен ровно один блок?

Решение. Рассуждения начинаем с качественного анализа. Испытание схемы может быть представлено в виде серии из *двух «единичных» опытов* по испытанию каждого элемента. Результатами опытов являются события A_1 (или $\overline{A_1}$), A_2 (или $\overline{A_2}$). Событие C, состоящее в том, что в блоке исправен только один элемент, есть наступление хотя бы одного из двух (очевидно, несовместных) вариантов: $A_1\,\overline{A_2}$ или $\overline{A_1}\,A_2$:

$$C=A_1\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,A_2,\text{ так что } P(C)=P(A_1\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,A_2),$$

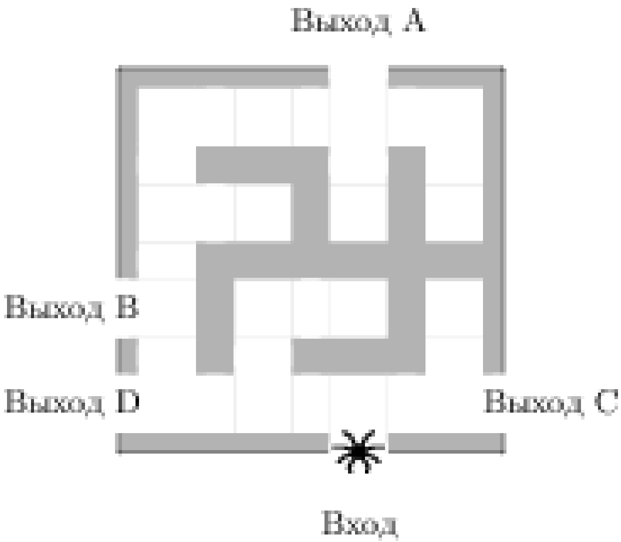
или

$$P(C)=P(A_1\ \overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\ A_2).$$

Остается вычислить вероятность каждого произведения. По условию, $P(A_1)=0{,}9,\ P(A_2)=0{,}8$, следовательно, $P(\overline{A}_1)=0{,}1,\ P(\overline{A}_2)=0{,}2$. Вероятности всех этих событий, как мы видим, остаются постоянными в условиях испытания схемы, значит можно утверждать независимость событий A_1 и $\overline{A}_2$ а также $\overline{A}_1$ и A_2. Тогда

$$P(C)=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)=0{,}9\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}8=0{,}26.$$

Пример 3. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может. На каждом разветвлении паук выбирает путь, по которому ещё не полз. Считая выбор дальнейшего пути случайным, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу B .



Решение. Пауку на пути к выходу В предстоит 4 развилки, на каждой из которых он выбирает верный путь с вероятностью p=1/2. В результате имеем вероятность «совмещения» четырех независимых события (вероятность произведения), которая будет равна 1/2 • 1/2 • 1/2 • 1/2=1/16.

Пример 4. Пользователь компьютера давно не обновлял вирусные базы. Новый вирус поэтому может быть обнаружен с вероятностью 0,6. Если вирус не обнаружен, то он поражает наиболее ценные файлы с вероятностью 0,8. Какова вероятность поражения ценных файлов?

Рассуждения, приводящие к ответу, могут быть выстроены в форме следующего диалога.

ВОПРОС	ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ
В чем состоит испытание?	«Вирусная атака».
Вероятность какого события требуется найти?	Событие *A* - поражение ценных файлов.
Можно ли событие *A* «разложить» на более простые?	Событие *B* – необнаружение вируса и событие *C* – поражение при этом ценных файлов.
Как можно выразить событие *A* с помощью действий над событиями *B* и *C*?	*A=BC*, поскольку А состоит в совместном наступлении *B* и *C*.
Записать формулу для вычисления вероятности события *A*.	$P(A) = P(B)P_B(C)$
Известна ли вероятность события *B*? Если нет, то как ее найти?	Нам дана вероятность обнаружения вируса; вероятность необнаружения ищется как вероятость противоположного события: *P*(*B*)=1-0,6=0,4.
Что означает в данной задаче запись $P_B(C)$? Известна ли эта вероятность?	$P_B(C)$ есть вероятность события *C* (поражения ценных файлов) при условии, что событие *B* (необнаружение вируса) наступило. Эта вероятность дана, она равна 0,8.
Получим окончательный ответ.	$P(A) = P(B)P_B(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}8$ =0,32.

В качестве обсуждения решения стоит выяснить, зависимы ли здесь оказались события *B* и *C* (ответ: зависимы) и чему равна была бы вероятность события *C*, если бы *B* не наступило (ответ: вирус обнаружен и уничтожен, следовательно $P_{\bar{B}}(C) = 0$).

Пример 5 . Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 22 пассажиров, равна 0,92. Вероятность того, что окажется меньше 11 пассажиров, равна 0,45. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 11 до 21.

Решение. В очевидных обозначениях имеем

$$P(n < 22) = P(n < 11) + P(11 < n \le 21),$$

откуда

$$P(11 < n \le 21) = P(n < 22) - P(n < 11)$$

или

$$P(11 < n \le 21) = 0{,}92 - 0{,}45 = 0{,}47.$$

Если опыт можно представить как серию из нескольких «единичных опытов», то задача решается по следующему алгоритму:

1. обосновать, что исходы каждого опыта – элементарные;

2. произвести декомпозицию данного события (представить его как результат действий над более простыми, полученными в единичных опытах);

3.выяснить «взаимоотношения» компонентов, полученных в декомпозиции (например, попарную несовместность, если речь идет о сумме событий);

4.записать формулу для вычисления вероятности «сложного события» в соответствии с декомпозицией;

5.произвести соответствующие числовые выкладки.