КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

1. Алгебраические уравнения: рациональные (содержат только целые степени неизвестной) и иррациональные (содержат дробные степени неизвестной)

2) Показательные и логарифмические (неизвестная служит аргументом показательной или логарифмической функции)

3) Тригонометрические (неизвестная содержится под знаком тригонометрической или обратной тригонометрической функции)

1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

а) Решите уравнение

$$3\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^x+3\cdot 4^{x+1}=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;3]$.

Анализ задачи. Имеем показательное уравнение. Его решение возможно путем деления обеих частей на одну из показательных функций (заметим, что показательная функция всегда положительна), если только все функции обладают равными показателями. Последнее легко достигается, если заметить, что $9^{x-\frac{1}{2}}=9^x:9^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}9^x$ и $4^{x+1}=4\cdot 4^x$. Теперь возможно деление на 4^x.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $\left(\frac{9}{4}\right)^x - 7\left(\frac{3}{2}\right)^x + 12 = 0$.

Пусть $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, тогда уравнение запишется в виде $t^2 - 7t + 12 = 0$, откуда $t = 3$ или $t = 4$.

При $t = 3$ получим: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 3$, откуда $x = \log_{\frac{3}{2}} 3$.

При $t = 4$ получим: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 4$, откуда $x = \log_{\frac{3}{2}} 4$.

б) Поскольку $\left(\frac{3}{2}\right)^2 < 3 < \left(\frac{3}{2}\right)^3 < 4$, получаем: $2 < \log_{\frac{3}{2}} 3 < 3 < \log_{\frac{3}{2}} 4$. Значит, отрезку $[2; 3]$ принадлежит число $\log_{\frac{3}{2}} 3$.

Ответ: а) $\log_{\frac{3}{2}} 3$; $\log_{\frac{3}{2}} 4$; б) $\log_{\frac{3}{2}} 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

2. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1, \frac{8}{9}\right]$.

Решение.

а) Заметим, что уравнение определено при любом x. Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2 + 5) = \log_2(8x^4 + 14) - \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(9x^2 + 5) = \log_2(4x^4 + 7) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9x^2 + 5 = 4x^4 + 7 \Leftrightarrow 4x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0.$$

Значит, либо $4x^2 - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$ или $x = -\frac{1}{2}$, либо $x^2 - 2 = 0$, откуда $x = \sqrt{2}$ или $x = -\sqrt{2}$.

б) Поскольку $-\sqrt{2} < -1 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{8}{9} < \sqrt{2},$ отрезку $\left[-1, \frac{8}{9}\right]$ принадлежат корни $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}.$

Ответ: а) $x = \pm\sqrt{2}, x = \pm\frac{1}{2};$ б) $\pm\frac{1}{2}.$

3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

3.1. ***Список формул, определяющих общие решения простейших тригонометрических уравнений, в случае равенства тригонометрических функций нулю и единице***; здесь $\boldsymbol{Z}$ означает множество всех целых чисел.

Вид уравнения	Решения уравнения
$\sin t = 0$ или $\operatorname{tg} t = 0$	$t = \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$
$\cos t = 0$ или $\operatorname{ctg} t = 0$	$t = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$
$\sin t = 1$	$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$
$\sin t = -1$	$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$
$\cos t = 1$	$t = 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$
$\cos t = -1$	$t = \pi + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

3.2. ***Решения простейших тригонометрических уравнений в общем случае***

Вид уравнения	Решения уравнения
$\sin t = a, \ a \in [-1, 1]$	$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$ или две серии решений : $t = \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z};$ $t = \pi - \arcsin a + 2\pi l, \quad l \in \boldsymbol{Z}$
$\cos t = a, \ a \in [-1, 1]$	$t = \pm \arccos a + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} t = a$	$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{ctg} t = a$	$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}$

3.3. ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ С ОТБОРОМ КОРНЕЙ

1. Решите уравнение $\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\sin x=\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5\pi,\ -4\pi].$

Решение.

а) Исключим значение $\frac{3\pi}{2}$ под знаком синуса, используя формулу приведения. Имеем тогда уравнение в виде:

$$-\sqrt{2}\cos x\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow\cos x\cdot\left(\sqrt{2}\sin x+1\right)=0$$

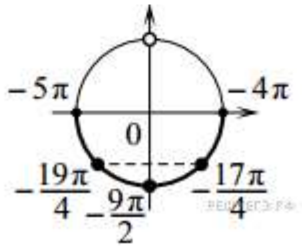
Значит, либо $\cos x=0,$

откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$

либо $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2},$ откуда

$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ или $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-5\pi,\ -4\pi].$ Получим числа $-\frac{19\pi}{4},-\frac{9\pi}{2},-\frac{17\pi}{4}.$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$

б) $-\frac{19\pi}{4},-\frac{9\pi}{2},-\frac{17\pi}{4}.$

Второй способ отбора корней.

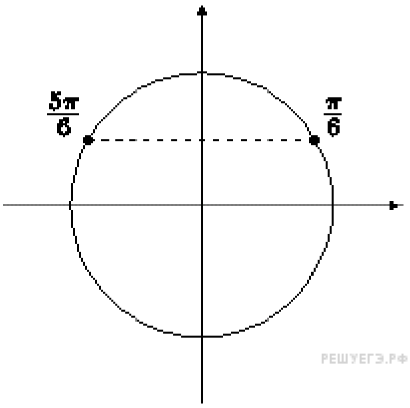
Серия $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ $x\in[-5\pi,\ -4\pi].$ Ясно, что значения k должны быть отрицательными, «в районе» чисел $k=-4$, $k=-5.$ Но при $k\geq-4$ имеем $x\geq-3{,}5\pi$, при $k=-5$ имеем $x=-\frac{9\pi}{2}$, а при $k\leq-6$ $x\leq-5{,}5\pi$. Следовательно, условию $x\in[-5\pi,\ -4\pi]$ удовлетворяет лишь $x=-\frac{9\pi}{2}$.

Аналогично, перебором целых значений k получаем в серии $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$

значение $x=-\frac{17\pi}{4}$ (случай $k=-2$), а в серии $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$ значение $x=-\frac{19\pi}{4}$ (случай $k=-2$).

2. Решите уравнение: $(2\sin x-1)(\sqrt{-\cos x}+1)=0.$

Решение.



Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x\le 0.$ выражение $\sqrt{-\cos x}+1$ положительно при всех допустимых $x.$

Значит,

$$2\sin x-1=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Необходимость отбора корней диктуется наличием области определения $\cos x\le 0.$

Так как $\cos x\le 0,$ числа $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ не являются решениями уравнения.

Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

3.3. ОДНОРОДНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ***Однородными уравнениями*** первой, второй,... степеней называются, соответственно, уравнения вида

$$A\sin x+B\cos x=0;\ \ A\ne 0, B\ne 0,$$

$$A\sin^2 x+B\sin x\cos x+C\cos^2 x=0;\ \ A\ne 0, C\ne 0$$

Характерным признаком каждого из таких уравнений является одинаковость степеней одночленов (от двух аргументов - синуса и косинуса), записанных в левой части.

Важнейшим свойство однородных уравнений состоит в следующем: значения аргумента x для которых $\sin x=0$ или $\cos x=0$ не могут быть решениями таких уравнений. В самом деле, если, предположить, например, что $\sin x=0$, то однородное уравнение (в результате подстановки в него значения ноль вместо $\sin x$) преобразуется к виду $\cos x=0$, тогда как на самом деле для одних и тех же значений аргумента x обращение в ноль и синуса и косинуса - невозможно.

По указанной причине обе части уравнения можно поделить на $\cos x$ $(\sin x)$ в степени, соответствующей степени уравнения, после чего получим алгебраическое уравнение относительно $tg\ x$ $(ctg\ x)$.

Пример. Решить уравнение

$$2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2} = \sin x.$$

Анализ задачи. Следует перейти к одинаковым аргументам тригонометрических функций, после чего определить, к какому из изученных стандартных типов относится это уравнение.

Решение. Перейдем к аргументу $\frac{x}{2}$:

$$2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0.$$

Уравнение теперь имеет вид однородного второй степени, однако коэффициент перед квадратом косинуса C=0, так что прием деления пока невозможен.

В результате разложения на множители получаем

$$2\cos\frac{x}{2}(\sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}) = 0,$$

откуда

$$\cos\frac{x}{2} = 0, \text{ или } \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0.$$

В первом случае $x = (2m+1)\pi,\ m \in Z$; во втором обнаруживаем однородное уравнение первой степени, которое теперь может быть решено приемом деления на $\cos x$. Имеем $tg\frac{x}{2} = \sqrt{3}$, а тогда

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in Z.$$

Ответ: $x = (2m+1)\pi,\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ m,n \in Z$.

3.4. СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{y}} = 0, \\ y - \cos x = 0. \end{cases}$$

Решение. Имеем область определения $y > 0$ или $\cos x > 0$.

Из уравнения $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ теперь находим: $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

1) Пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда

либо $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$ и $y = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0,$

либо $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $y = \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, чем нарушается область определения.

2) Пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ — нарушена область определения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Пример 2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Анализ задачи. Произведения синусов и косинусов – компоненты формул косинуса суммы или разности. Поэтому имеет смысл выполнить сложение и вычитание уравнений.

Решение. В результате сложения и вычитания уравнений приходим к следующей системе :

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(x+y) = 0. \end{cases}$$

Каждое уравнение – простейшее; в результате решения получаем:

$$x + y = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ \ x - y = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ m, n \in Z\,.$$

Имеем два следующих случая.

$$1)\ \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + \pi m, \\ x - y = \frac{\pi}{6} + \pi n, \end{cases} \qquad m, n \in Z\,.$$

Снова выполняя операции сложения и вычитания уравнений, получаем

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(m+n), \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(m-n), \end{cases} \qquad m, n \in Z.$$

2)Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, \\ x - y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \end{cases} \quad m, n \in Z,$$

имеем

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}(m - n), \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}(m + n), \end{cases} \quad m, n \in Z.$$

Полученные в обоих случаях пары серий значений и служат ответом.

4. КОМБИНИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

а) Решите уравнение

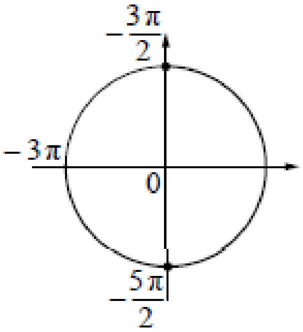
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x} = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Пусть $t=\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x}$, тогда исходное уравнение запишется в виде $t+\frac{1}{t}=2$; $t=1$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x}=1$, откуда $\cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

№	Условие
	Задание 15 № 507793. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \cos(x+y)=-\frac{1}{2}, \\ \sin x+\sin y=\sqrt{3}. \end{cases}$ Источник: МИОО: Тренировочная работа по математике 21.12.2009 вариант 1. (Часть С) Показать решение Обсудить ВКонтакте Сообщить об ошибке

№	Условие
	Задание 15 № 507799. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x+\sin y=1, \\ \lvert x-y\rvert=\frac{2\pi}{3}. \end{cases}$ Источник: МИОО: Тренировочная работа по математике 21.12.2009 вариант 2. (Часть С) Показать решение Обсудить ВКонтакте Сообщить об ошибке

№	Условие
	Задание 15 № 508232. а) Решите уравнение $\log_3(\sin 2x+\cos(\pi-x)+9)=2.$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$. Показать решение Обсудить ВКонтакте Сообщить об ошибке

№	Условие
	Задание 15 № 508253. а) Решите уравнение $5^{2\sin 2x}=\left(\frac{1}{25}\right)^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}.$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. Показать решение Обсудить ВКонтакте Сообщить об ошибке

№	Условие
	Задание 15 № 509000. а) Решите уравнение $\frac{\cos 2x+\sqrt{2}\cos x+-1}{\operatorname{tg} x-1}=0.$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. Показать решение Обсудить ВКонтакте Сообщить об ошибке

№	Условие

Задание 15 № 509021. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right].$

Показать решение

Обсудить ВКонтакте Сообщить об ошибке

№	Условие
	Задание 15 № 504944. а) Решите уравнение $-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x = \cos x.$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};\ 6\pi\right].$ Показать решение Комментарии (1) Обсудить ВКонтакте Сообщить об ошибке

№	Условие
34	**Задание 15 № 504240.** а) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0.$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2},\ 3\pi\right].$