# Лекция 3. Вероятности комбинированных событий

## *1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ:*

**1)*Вероятность произведения есть***

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B),$$

***где $P_A(B)$ означают вероятность события В, вычисленную при условии, что А произошло (условная вероятность события В).***

***Результат может быть распространен и на большее количество событий, например,***

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C).$$

***Для n событий, независимых в совокупности,***

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n);$$

***в частности, для двух независимых событий***

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

**2) *Вероятность суммы двух несовместных событий* вычисляется по формуле**

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2).$$

**3) *Вероятность суммы двух совместных событий* вычисляется по формуле**

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2).$$

***Вероятность суммы n попарно несовместных событий вычисляется в виде***

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n);$$

***для случая же совместимости любой пары событий имеем***

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}).$$

***4) Если $A,\overline{A}$ - пара противоположных событий, то справедливо равенство***

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

## *2. ПРИМЕРЫ.*

**Пример 1.** Пользователь компьютера давно не обновлял вирусные базы. Новый вирус поэтому может быть обнаружен с вероятностью 0,6. Если вирус не обнаружен, то он поражает наиболее ценные файлы с вероятностью 0,8. Какова вероятность поражения ценных файлов?

Рассуждения, приводящие к ответу, могут быть выстроены в форме следующего диалога.

| ВОПРОС | ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ |
|---|---|
| В чем состоит испытание? | «Вирусная атака». |
| Вероятность какого события требуется найти? | Событие $A$ - поражение ценных файлов. |
| Можно ли событие $A$ «разложить» на более простые? | Событие $B$ – необнаружение вируса и событие $C$ – поражение при этом ценных файлов. |
| Как можно выразить событие $A$ с помощью действий над событиями $B$ и $C$? | $A=BC$, поскольку A состоит в совместном наступлении $B$ и $C$. |
| Записать формулу для вычисления вероятности события $A$. | $P(A) = P(B)P_B(C)$ |
| Известна ли вероятность события $B$? Если нет, то как ее найти? | Нам дана вероятность обнаружения вируса; вероятность необнаружения ищется как вероятость противоположного события: $P(B)$=1-0,6=0,4. |
| Что означает в данной задаче запись $P_B(C)$? Известна ли эта вероятность? | $P_B(C)$ есть вероятность события $C$ (поражения ценных файлов) при условии, что событие $B$ (необнаружение вируса) наступило. Эта вероятность дана, она равна 0,8. |
| Получим окончательный ответ. | $P(A) = P(B)P_B(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$. |

В качестве обсуждения решения стоит выяснить, зависимы ли здесь оказались события $B$ и $C$ (ответ: зависимы) и чему равна была бы вероятность события $C$, если бы $B$ не наступило (ответ: вирус обнаружен и уничтожен, следовательно $P_{\overline{B}}(C) = 0$).

**Пример 2.** Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 22 пассажиров, равна 0,92. Вероятность того, что окажется меньше 11 пассажиров, равна 0,45. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 11 до 21.

*Решение.* В очевидных обозначениях имеем

$$P(n<22)=P(n<11)+P(11<n\le 21),$$

откуда

$$P(11<n\le 21)=P(n<22)-P(n<11)$$

или

$$P(11<n\le 21)=0{,}92-0{,}45=0{,}47.$$

**Пример 3.** Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

*Решение.* Для начала найдем вероятность ничьей. Так как события «выигрыш», «проигрыш» и «ничья» образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна 1. Тогда вероятность ничьей (получения 1 очка)( равна 1-0,4-0,4=0,2.

Команда может получить не меньше 4 очков в двух играх тремя способами: 3+1, 1+3, 3+3. Эти события несовместны, так что вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Каждое из этих событий представляет собой произведение двух независимых событий — результата в первой и во второй игре. Отсюда имеем:

$$P(N\ge 4)=P(3+1)+P(1+3)+P(3+3)=P(3)\cdot P(1)+P(1)\cdot P(3)+P(3)\cdot P(3)=$$
$$=0{,}4\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}4+0{,}4\cdot 0{,}4=0{,}08+0{,}08+0{,}16=0{,}32.$$

Ответ: 0,32.

***3. ОБЩАЯ СХЕМА.*** *Сформулируем общую схему нахождения вероятности «составного» события.*

***1. произвести декомпозицию данного события (представить его как результат действий над более простыми, полученными в единичных опытах);***

***2.выяснить «взаимоотношения» компонентов, полученных в декомпозиции (например, попарную несовместность, если речь идет о сумме событий);***

***3.записать формулу для вычисления вероятности «сложного события» в соответствии с декомпозицией;***

***4.произвести соответствующие числовые выкладки.***

***ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.***

1. Вероятность, что Кролик угостит Винни-Пуха медом, равна 0,6; сгущенкой – 0,8, при этом он предложит угощения в виде бутербродов с вероятностью 0,2. Какова вероятность, что исполнится желание Винни-Пуха: «и то, и другое, и можно без хлеба» ?

Ответ : 0,6 0,8 (1-0,2)=0,384

2. Каждый из трех независимо работающих сигнализаторов своевременно сообщает о нарушении заданного режима работы реактора с вероятностью, соответственно, $p_1 = 0{,}9$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}75$. Какова вероятность того, что при нарушении заданного режима работы сигнала не поступит?

3. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,07 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

4. По данным социологов, в городе А данный кандидат в депутаты будет поддержан на выборах большей частью населения с вероятностью $p_1 = 0{,}6$; в городе В - с вероятностью $p_2 = 0{,}7$. Какова вероятность, что на выборах кандидат одержит победу хотя бы в одном из городов А и В?

5. Вероятность того, что на тесте по математике учащийся У. верно решит больше 11 задач, равна 0,77. Вероятность того, что У. верно решит больше 10 задач, равна 0,87. Найдите вероятность того, что У. верно решит ровно 11 задач.

***4. СХЕМА АЛЬТЕРНАТИВ.*** Речь идет о событии D, которое, так сказать, «укладывается» в следующую схему:

«или (A и B) или не (A и C)» .

Другими словами $D = AB + \overline{A}C$ и

$$P(D)=P(A)P(B)+(1-P(A))P(C)$$

**Пример 1.** Двор дома освещается фонарём с двумя лампами, параллельно соединенными. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,1. Найдите вероятность того, что к концу года в фонаре будет гореть только одна лампа.

*Решение.* Пусть событие А состоит в том, что к концу года горит первая лампа, В- горит вторая лампа.

Используем схему альтернатив: событие D, состоящее в исправности только одной из ламп, представимо в виде «или А и не В или не А и В». Имеем, по условию,

$$P(D)=0{,}1\ (1-0{,}1)+\ (1-0{,}1)\ 0{,}1=0{,}18.$$

**Пример 2.** Компьютерной диагностике подвергается группа участников диспансеризации, среди которых 10 % страдают некоторыми заболеваниями. В результате диагностики болезнь выявляется с вероятностью 0,95, и с вероятностью равной 0,03 здоровый участник признается больным. Какова вероятность, что произвольно выбранного протестированного участника компьютер признает заболевшим?

*Решение.* Если событие D состоит в том, что *протестированный участник признан больным*, то наступление D означает, что больным признан либо здоровый (событие А) , либо больной (событие не А) член группы: «или А и D, или не А и D». Следовательно имеем по формуле альтернатив
$P(D)=(1-0{,}1)0{,}03+0{,}1\ (0{,}95)=0{,}27+0{,}095=0{,}365$.

**Пример 3.** Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

*Решение.* Поскольку в задании даны вероятности попадания, то рассмотрим для начала событие D, состоящее в попадании из наугад взятого револьвера. Если А – выбор пристрелянного револьвера, а В попадание, то

D есть А и В , либо не А и В.

Теперь, по формуле классической вероятности $P(A)=4/10$, $P(\overline{A})=6/10$ и $P(D)=0{,}4\ 0{,}8+0{,}6\ 0{,}3=0{,}5$.

Соответственно, вероятность непопадания равна $P(\overline{D})=1-0{,}5=0{,}5$.

## *ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.*

1. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25% этих стекол, вторая – 75%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 5%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

2. Вероятность того, что первый из «любимых номеров» телефона занят равна 0,1, второй номер занят с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что

а)занят ровно один из двух любимых номеров;

б) оба номера свободны.

3. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная из упаковки батарейка будет забракована.

## *ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ*

Задача 1. В магазин поступают изделия двух поставщиков. Первый поставляет 2% процента бракованных изделий, второй – 5%. В итоге, в магазине оказывается 4% бракованных изделий. Какова вероятность, что случайно выбранное в магазине изделие окажется от первого поставщика.

*Решение.* Пусть $m$ изделий поставляет первый, а $n$ изделий – второй поставщик. Тогда искомая вероятность события А – изделие от первого поставщика- равна

$P(A)=m/(m+n)$.

При этом связь между значениями $m$ и $n$ может быть установлена с помощью того факта, что количество бракованных изделий в магазине складывается из бракованных изделий от первого и второго поставщиков:

$0{,}02m+0{,}05n=0{,}04\,(m+n)$, откуда

$n=2m$.

Теперь:

$P(A)=m/(m+2m)$, $P(A)=1/3$.

Задача 2 (для самостоятельного решения). Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 55% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 35% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 45% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

## ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

1. Злоумышленник подсмотрел код камеры хранения, но не успел запомнить две последние цифры, однако заметил, что они различные. Какова вероятность, что он , набрав их наугад, он с первой попытки вскроет камеру?

2. В комплекте из десяти дискет ровно две заражены вирусом. Какова вероятность того, что обе наугад взятые дискеты окажутся без вируса?

3. Каждый из трех независимо работающих сигнализаторов своевременно сообщает о нарушении заданного режима работы реактора с вероятностью, соответственно, $p_1 = 0{,}9;$ $p_2 = 0{,}8;$ $p_3 = 0{,}75.$ Какова вероятность того, что при нарушении заданного режима работы сигнала не поступит?

4. Вероятности своевременной доставки денежного перевода в города А, Б, В равны соответственно $p_1 = 0{,}7,$ $p_2 = 0{,}9,$ $p_3 = 0{,}6.$ В каждый из этих городов отправлены по одному переводу. Какова вероятность того, что ровно в два города перевод будет доставлен своевременно?