Векторы в пространстве и метод координат. Задача С2

Существует два способа решения задач по стереометрии.

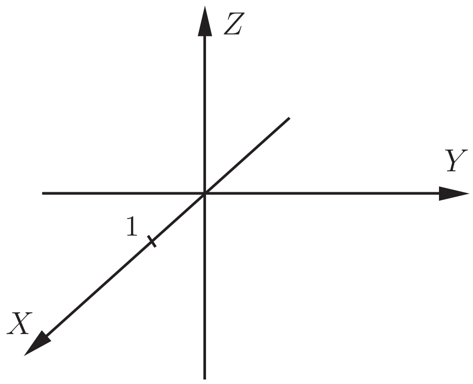
Первый — классический — требует отличного знания аксиом и теорем стереометрии, логики, умения построить чертеж и свести объемную задачу к планиметрической. Способ хорош тем, что развивает мозги и пространственное воображение.

Другой метод — применение векторов и координат. Это простые формулы, алгоритмы и правила. Он очень удобен, особенно когда времени до экзамена мало, а решить С2 хочется.

Если вы освоили векторы на плоскости и действия с ними — то и с векторами в пространстве разберетесь. Многие понятия окажутся знакомыми.

Система координат в пространстве

Выберем начало координат. Проведем три взаимно перпендикулярные оси X, Y и Z. Зададим удобный масштаб.

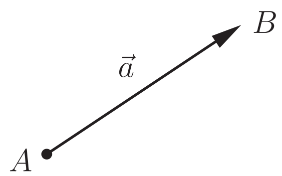


Получилась **система координат** в трехмерном пространстве. Теперь каждая его точка характеризуется тремя числами — координатами по X, Y и Z. Например, запись $M(-1;\ 3;\ 2)$ означает, что координата точки M по X (абсцисса) равна -1, координата по Y (ордината) равна 3, а координата по Z (аппликата) равна 2.

Векторы в пространстве определяются так же, как и на плоскости. Это направленные отрезки, имеющие начало и конец. Только в пространстве вектор задается тремя координатами x, y и z:

$$\vec{a}(x_a;\ y_a;\ z_a)$$

Как найти координаты вектора? Как и на плоскости — из координаты конца вычитаем координату начала.



$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A)$$

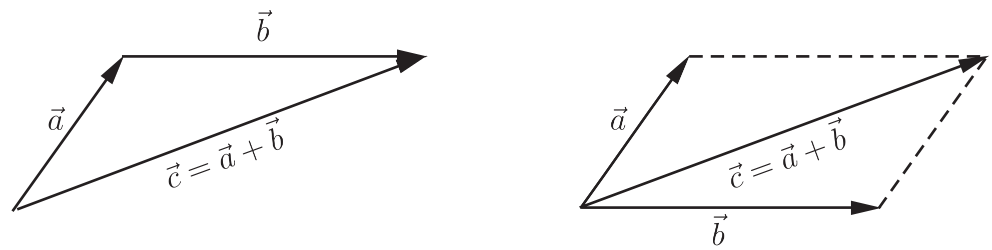
Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ в пространстве — это расстояние между точками A и B. Находится как корень квадратный из суммы квадратов координат вектора.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Пусть точка M — середина отрезка AB. Ее координаты находятся по формуле:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; \qquad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Для сложения векторов применяем уже знакомые правило треугольника и правило параллелограмма.



Сумма векторов, их разность, произведение вектора на число и скалярное произведение векторов определяются так же, как и на плоскости. Только координат не две, а три. Возьмем векторы $\vec{a}(x_a;\ y_a;\ z_a)$ и $\vec{b}(x_b;\ y_b;\ z_b)$.

Сумма векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_a + x_b;\ y_a + y_b;\ z_a + z_b)$$

Разность векторов:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(x_a - x_b;\ y_a - y_b;\ z_a - z_b)$$

Произведение вектора на число:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{p}(\lambda x_a;\ \lambda y_a;\ \lambda z_a)$$

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

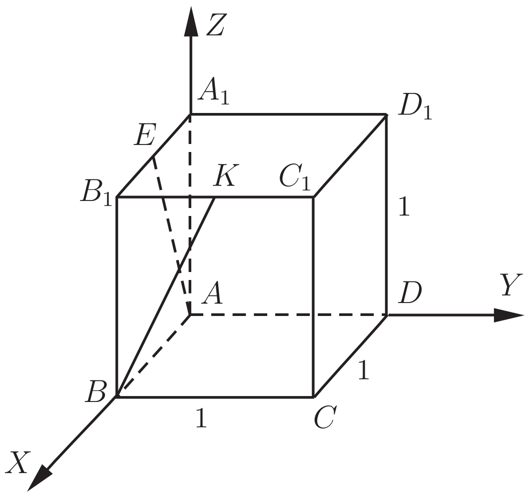
Косинус угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

Последняя формула удобна для нахождения угла между прямыми в пространстве. Особенно если эти прямые — скрещиваются. Напомним, что так называются прямые, которые не параллельны и не пересекаются. Они лежат в параллельных плоскостях.

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K — середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

Если в задаче С2 вам достался куб — значит, повезло. Он отлично вписывается в прямоугольную систему координат. Строим чертеж:



Длина ребра куба не дана. Какой бы она ни была, угол между AE и BK от нее не зависит. Поэтому возьмем единичный куб, все ребра которого равны 1.

Прямые AE и BK — скрещиваются. Найдем угол между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$. Для этого нужны их координаты.

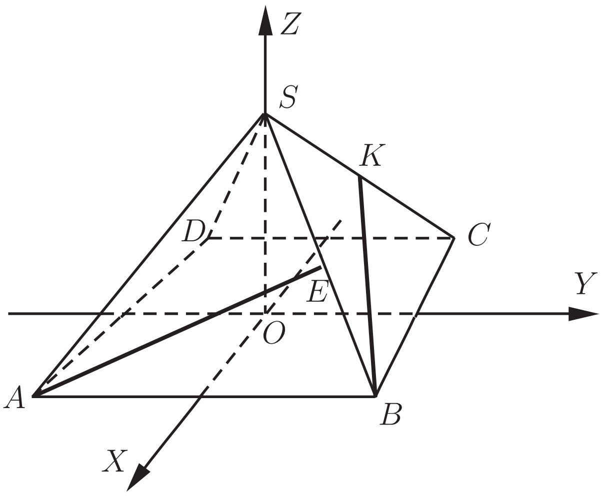
$A\ \left(0;\ 0;\ 0\right)$
$B\ \left(1;\ 0;\ 0\right)$
$E\ \left(\frac{1}{2};\ 0;\ 1\right)$
$K\ \left(1;\ \frac{1}{2};\ 1\right)$

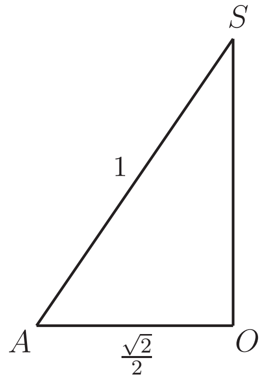
Запишем координаты векторов:
$\overrightarrow{AE}\ \left(\frac{1}{2};\ 0;\ 1\right)$
$\overrightarrow{BK}\ \left(0;\ \frac{1}{2};\ 1\right)$
и найдем косинус угла между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BK}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BK}\right|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2}\cdot\sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, K — середины ребер SB и SC соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

Лучше всего выбрать начало координат в центре основания пирамиды, а оси X и Y сделать параллельными сторонам основания.





Координаты точек A, B и C найти легко:

$A\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 0\right)$
$B\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right)$
$C\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right)$

Из прямоугольного треугольника AOS найдем $OS = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Координаты вершины пирамиды: $S\left(0;\ 0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Точка E — середина SB, а K — середина SC. Воспользуемся формулой для координат середины отрезка и найдем координаты точек E и K.

$E\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
$K\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$:

$\overrightarrow{AE}\ \left(-\frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
$\overrightarrow{BK}\ \left(-\frac{3}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

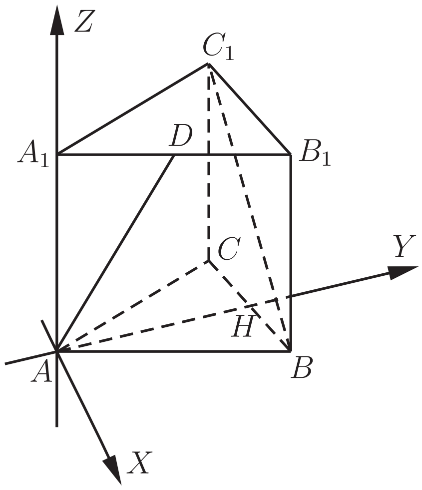
и угол между ними:

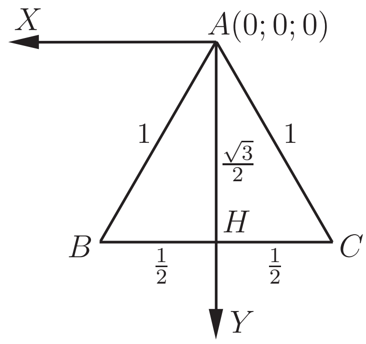
$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BK}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BK}\right|} = \frac{1}{6}$$

Покажем теперь, как вписать систему координат в треугольную призму:

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1.

Пусть точка A — начало координат. Возьмем ось X параллельно стороне BC, а ось Y перпендикулярно ей. Другими словами, на оси Y будет лежать отрезок AH, являющийся высотой треугольника ABC. Нарисуем отдельно нижнее основание призмы.





Запишем координаты точек:

$A\ \big(0;\ 0;\ 0\big)$
$A_1\ \big(0;\ 0;\ 1\big)$
$B\ \big(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\big)$
$B_1\ \big(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1\big)$
$C_1\ \big(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1\big)$

Точка D — середина A_1B_1. Значит, пользуемся формулами для координат середины отрезка.

$D\ \big(\frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{4};\ 1\big)$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC_1}$, а затем угол между ними:

$\overrightarrow{AD}\ \big(\frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{4};\ 1\big)$
$\overrightarrow{BC_1}\ \big(-1;\ 0;\ 1\big)$

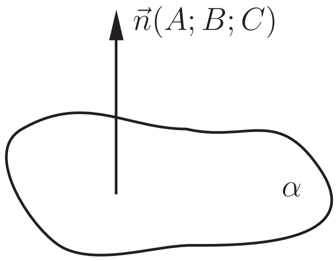
$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC_1}\right|} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

Смотрите, как легко с помощью векторов и координат найти угол между прямыми. А если требуется найти угол между плоскостями или между прямой и плоскостью? Для решения подобных задач нам понадобится уравнение плоскости в пространстве.

Плоскость в пространстве задается уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Здесь числа A, B и C — координаты вектора, перпендикулярного этой плоскости. Его называют нормалью к плоскости.



Вместо x, y и z можно подставить в уравнение координаты любой точки, принадлежащей данной плоскости. Получится верное равенство.

Плоскость в пространстве можно провести через любые три точки, не лежащие на одной прямой. Поэтому для того, чтобы написать уравнение плоскости, берем координаты трех принадлежащих ей точек. Подставляем их по очереди в уравнение плоскости. Решаем полученную систему.

Покажем, как это делается.

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точки $M\ (1;\ 0;\ 1)$, $N\ (2;\ -2;\ 0)$ и $K\ (4;\ 1;\ 2)$.

Уравнение плоскости выглядит так:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Подставим в него по очереди координаты точек M, N и K.

Для точки M:

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D = 0.$$

То есть $A + C + D = 0$.

Для точки N:

$$A \cdot 2 + B \cdot (-2) + C \cdot 0 + D = 0;$$

$$2A - 2B + D = 0.$$

Аналогично для точки K:

$$4A + B + 2C + D = 0.$$

Получили систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ 2A - 2B + D = 0 \\ 4A + B + 2C + D = 0 \end{cases}$$

В ней четыре неизвестных: A, B, C и D. Поэтому одну из них мы выберем сами, а другие выразим через нее. Правило простое — вместо одной из переменных можно взять любое число, не равное нулю.

Пусть, например, $D = -2$. Тогда:

$$\begin{cases} A + C - 2 = 0 \\ 2A - 2B - 2 = 0 \\ 4A + B + 2C - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ A - B = 1 \\ 4A + B + 2C = 2 \end{cases}$$

Выразим C и B через A и подставим в третье уравнение:

$$\begin{cases} C = 2 - A \\ B = A - 1 \\ 4A + A - 1 + 4 - 2A = 2 \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$A = -\frac{1}{3}$
$B = -\frac{4}{3}$
$C = \frac{7}{3}$

Уравнение плоскости MNK имеет вид:

$$-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{7}{3}z - 2 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на -3. Тогда коэффициенты станут целыми:

$$x + 4y - 7z + 6 = 0.$$

Вектор $\vec{n}(1;\ 4;\ -7)$ — это нормаль к плоскости MNK.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$, имеет вид:

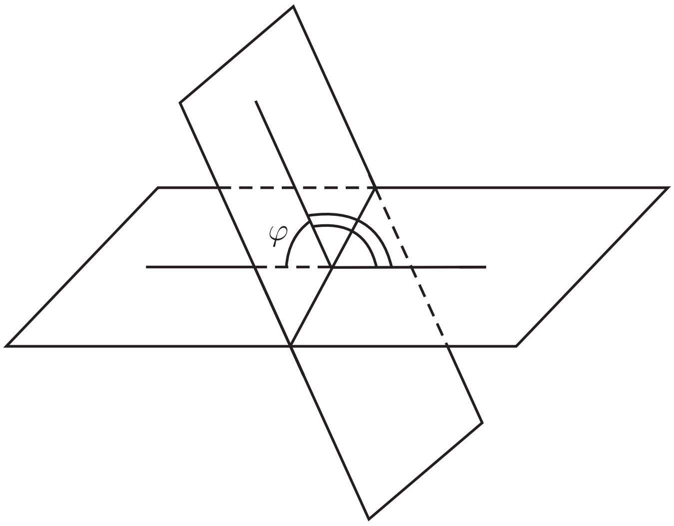
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|}$$

Не правда ли, знакомая формула? Скалярное произведение нормалей поделили на произведение их длин.

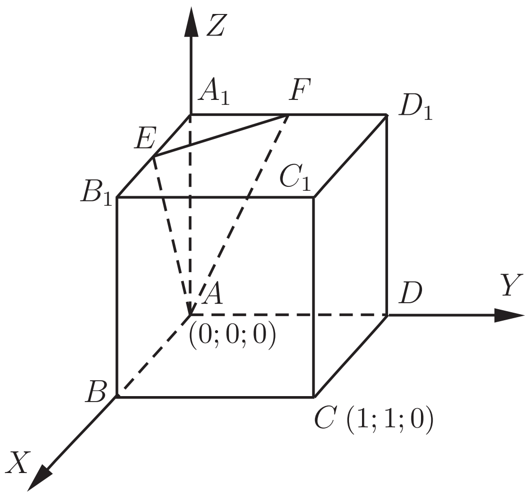
Заметим, что при пересечении двух плоскостей вообще-то образуется четыре угла.



Мы берем меньший из них. Поэтому в формуле стоит модуль скалярного произведения — чтобы косинус угла был неотрицателен.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F — середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BDD_1.

Строим чертеж. Видно, что плоскости AEF и BDD_1 пересекаются где-то вне куба. В классическом решении пришлось бы строить линию их пересечения. Но векторно-координатный метод значительно всё упрощает. Не будем ломать голову над тем, по какой прямой пересекаются плоскости. Просто отметим координаты нужных нам точек и найдем угол между нормалями к плоскостям AEF и BDD_1.



Сначала — нормаль к плоскости BDD_1. Конечно, мы можем подставить координаты точек B, D и D_1 в уравнение плоскости и найти коэффициенты, которые и будут координатами вектора нормали. А можем сделать хитрее — увидеть нужную нормаль прямо на чертеже. Ведь плоскость BDD_1 — это диагональное сечение куба. Вектор $\overrightarrow{AC}$ перпендикулярен этой плоскости.

Итак, первый вектор нормали у нас уже есть: $\vec{n}_1 = \overrightarrow{AC}\,(1;\ 1;\ 0)$.

Напишем уравнение плоскости AEF.

$A\ \big(0;\ 0;\ 0\big)$
$E\ \big(\frac{1}{2};\ 0;\ 1\big)$
$F\ \big(0;\ \frac{1}{2};\ 1\big)$

Берем уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и по очереди подставляем в него, вместо x, y и z, соответствующие координаты точек A, E и F.

$$\begin{array}{r|l} A & \qquad 0\cdot A + 0\cdot B + 0\cdot C + D = 0 \\ E & \qquad \frac{1}{2}\cdot A + 0\cdot B + 1\cdot C + D = 0 \\ F & \qquad 0\cdot A + \frac{1}{2}\cdot B + 1\cdot C + D = 0 \end{array}$$

Упростим систему:

$$\begin{cases} D = 0 \\ \frac{1}{2}A + C = 0 \\ \frac{1}{2}B + C = 0 \end{cases}$$

Пусть $C = -1$. Тогда $A = B = 2$.

Уравнение плоскости AEF: $\quad 2x + 2y - z = 0$.

Нормаль к плоскости AEF: $\quad \vec{n}(2;\ 2;\ -1)$.

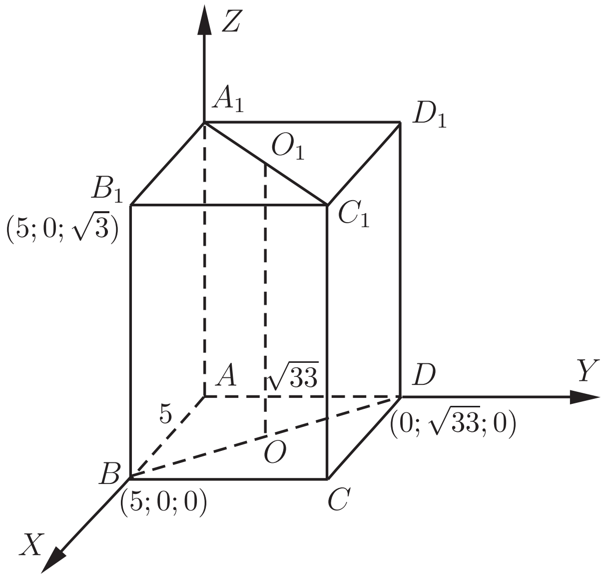
Найдем угол между плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{|2+2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = \frac{4}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

5. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.

Эта задача наглядно показывает, насколько векторный метод проще классического. Попробуйте, для разнообразия, построить необходимые сечения и провести все доказательства — как это делается в «классике» :-)

Строим чертеж. Прямую четырехугольную призму можно по-другому назвать «параллелепипед».



Замечаем, что длина и ширина параллелепипеда у нас есть, а вот высота — вроде не дана. Как же ее найти?

«Расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$». Прямые A_1C_1 и BD скрещиваются. Одна из них — диагональ верхнего основания, другая — диагональ нижнего. Вспомним, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра. Общий перпендикуляр к A_1C_1 и BD — это, очевидно, OO_1, где O — точка пересечения диагоналей нижнего основания, O_1 — точка пересечения диагоналей верхнего. А отрезок OO_1 и равен высоте параллелепипеда.

Итак, $AA_1 = \sqrt{3}$.

Плоскость AA_1D_1D — это задняя грань призмы на нашем чертеже. Нормаль к ней — это любой вектор, перпендикулярный задней грани, например, вектор $\overrightarrow{AB}(5;\ 0;\ 0)$ или, еще проще, вектор $\vec{n}_1(1;\ 0;\ 0)$.

Осталась еще «плоскость, проходящая через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D». Но позвольте, если плоскость перпендикулярна прямой B_1D — значит, B_1D и есть нормаль к этой плоскости! Координаты точек B_1 и D известны:

$B_1\ \left(5;\ 0;\ \sqrt{3}\right)$

$D\ \left(0;\ \sqrt{33};\ 0\right)$

Координаты вектора $\overrightarrow{B_1D}$ — тоже:

$\overrightarrow{B_1D}\left(-5;\ \sqrt{33};\ -\sqrt{3}\right) = \vec{n}_2$

Находим угол между плоскостями, равный углу между нормалями к ним:

$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{25+33+3}} = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

Зная косинус угла, находим его тангенс по формуле

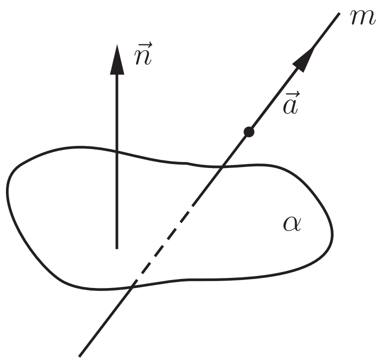
$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

Получим: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{6}{5}$.

Ответ: $\dfrac{6}{5}$.

Угол между прямой m **и плоскостью** α тоже вычисляется с помощью скалярного произведения векторов.

Пусть $\vec{a}$ — вектор, лежащий на прямой m (или параллельный ей), $\vec{n}$ — нормаль к плоскости α.

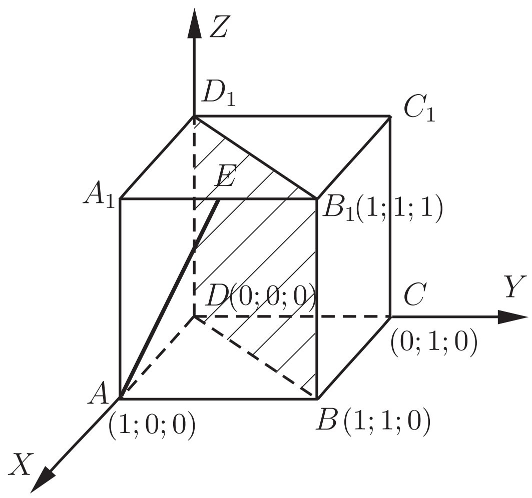


Находим синус угла между прямой m и плоскостью α по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}$$

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1.

Как всегда, рисуем чертеж и выбираем систему координат.



$A\ \big(1;\ 0;\ 0\big)$
$E\ \big(1;\ \frac{1}{2};\ 1\big)$

Находим координаты вектора $\overrightarrow{AE}\,\big(0;\ \frac{1}{2};\ 1\big)$.

Нужно ли нам уравнение плоскости BDD_1? В общем-то, без него можно обойтись. Ведь эта плоскость является диагональным сечением куба, а значит, нормалью к ней будет любой вектор, ей перпендикулярный. Например, вектор $\overrightarrow{AC}\,(1;\ -1;\ 0)$.

Найдем угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

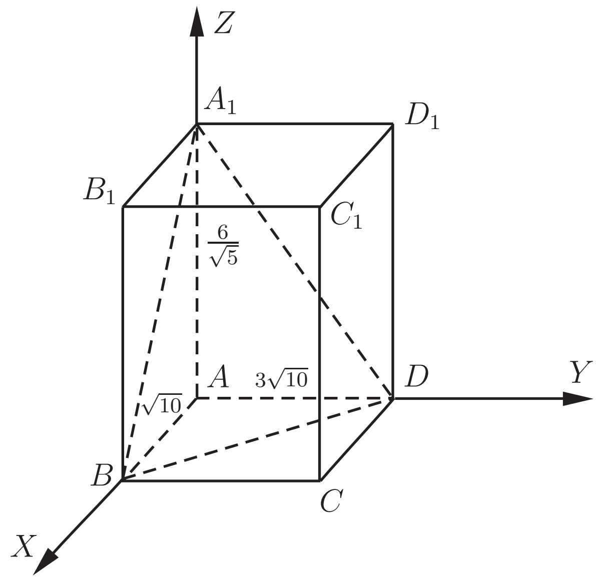
Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Расстояние от точки M с координатами $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{y_0}$ и $\mathbf{z_0}$ до плоскости α, заданной уравнением $\mathbf{Ax+By+Cz+D=0}$, можно найти по формуле:

$$h = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

7. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=\sqrt{10}$, $AD=3\sqrt{10}$. Высота параллелепипеда $AA_1=\frac{6}{\sqrt{5}}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости A_1DB.

Построим чертеж и выпишем координаты точек:



$A\ \left(0;\ 0;\ 0\right)$
$A_1\ \left(0;\ 0;\ \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$
$B\ \left(\sqrt{10};\ 0;\ 0\right)$
$D\ \left(0;\ 3\sqrt{10};\ 0\right)$

Запишем уравнение плоскости A_1DB. Вы помните, как это делается — по очереди подставляем координаты точек A_1, D и B в уравнение $Ax+By+Cz+D=0$.

$$\begin{array}{c|l} A_1 & \qquad \frac{6}{\sqrt{5}}C + D = 0 \\ B & \qquad \sqrt{10}A + D = 0 \\ D & \qquad 3\sqrt{10}B + D = 0 \end{array}$$

Решим эту систему. Выберем $D = -6\sqrt{10}$.
Тогда $C = 5\sqrt{2}$, $A = 6$, $B = 2$.

Уравнение плоскости A_1DB имеет вид:

$$6x + 2y + 5\sqrt{2}z - 6\sqrt{10} = 0.$$

Дальше все просто. Находим расстояние от точки A до плоскости A_1DB:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{50 + 36 + 4}} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{90}} = 2.$$

В некоторых задачах С2 требуется найти расстояние от прямой до параллельной ей плоскости. В этом случае можно выбрать любую точку, принадлежащую данной прямой.