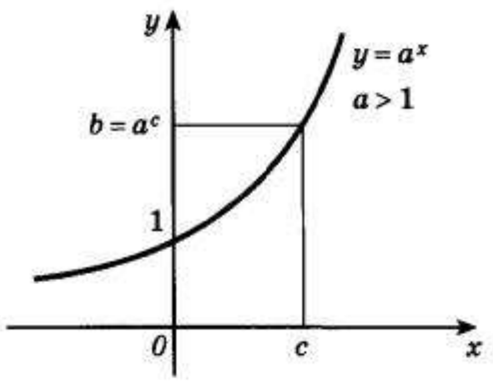
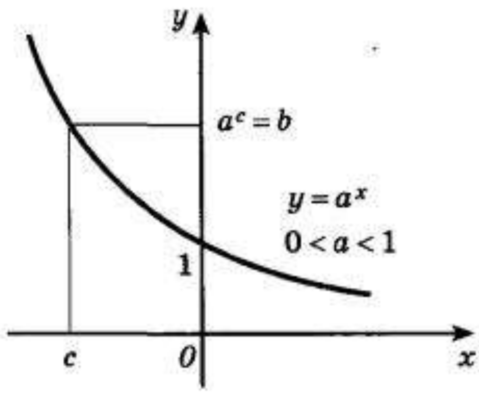
Показательные неравенства

- Решение показательных неравенств основано на строгой монотонности показательной функции. Известно, что
    - при основании, большем единицы, показательная функция возрастает,
    - при положительном основании, меньшем единицы, показательная функция убывает.





- Неравенство вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

в зависимости от основания эквивалентно следующему:

- при $a>1$ $f(x)>g(x)$;
- при $0<a<1$ $f(x)<g(x)$.

- Неравенство вида

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

эквивалентно следующему неравенству:

- при $a>1$ $f(x)<g(x)$;
- при $0<a<1$ $f(x)>g(x)$.

- Чтобы пользоваться свойством монотонности показательной функции следует путем надлежащих преобразований добиться одинаковых оснований в левой и правой частях неравенства.

Пример 1. Решить неравенство $16^x > 0{,}125$.

Решение. Заметим, что $16=2^4$, а $0{,}125=1/8=2^{-3}$. Тогда, переходя в обеих частях неравенства к основанию 2, получим $2^{4x} > 2^{-3}$. Так как основание $2 > 1$, то $4x > -3$, то есть $x>-3/4$.

Ответ: $(-3/4; +\infty)$.

- Более сложные показательные неравенства сводятся к простейшим методами, аналогичными методам, используемым при решении показательных уравнений.

Пример 2. Решить неравенство $25^x<6\cdot5^x-5$.

Решение. Так как $25=5^2$, то $25^x=5^{2x}$ и данное неравенство примет вид:

$$5^{2x} < 6\cdot 5^x - 5 \Leftrightarrow 5^{2x} - 6\cdot 5^x + 5 < 0.$$

Заменой $t=5^x$, $t>0$ сведем неравенство к квадратному:

$$t^2 - 6t + 5 < 0,$$

решая которое методом интервалов, получим:

Следовательно, $1<t<5$, то есть $1<5^x<5$, иначе $5^0<5^x<5^1$. Отсюда в силу свойства монотонности (возрастания) показательной функции получим, что $0<x<1$.

Ответ: (0; 1).

Пример 3. Решить неравенство

$$8\frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Решение. Числитель и знаменатель выражения в левой части данного неравенства разделим на 3^x. В результате получим:

$$8\frac{3^{-2}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}>1+\left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

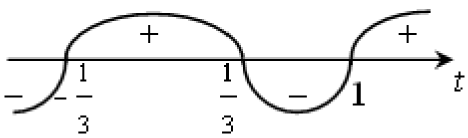
Сделав замену $t=(2/3)^x$, $t>0$ будем иметь:

$$\frac{8}{9(1-t)}>1+t$$

Решаем последнее неравенство:

$$\frac{8}{9(1-t)}-1-t>0 \Leftrightarrow \frac{9t^2-1}{9(1-t)}>0 \Leftrightarrow \frac{9t^2-1}{9(t-1)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(9t^2-1)<0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t-\frac{1}{3}\right)\left(t+\frac{1}{3}\right)<0.$$



Пользуясь методом интервалов, получаем t<-1/3 или 1/3<t<1. Неравенство $(2/3)^x<-1/3$ решений не имеет, а неравенство $1/3<(2/3)^x<1$ представим в виде

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}}<\left(\frac{2}{3}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

(можно также прологарифмировать неравенство $1/3<(2/3)^x<1$ по основанию 2/3, меньшему единицы), откуда $0<x<\log_{2/3}(1/3)$.

Ответ: $(0;\ \log_{2/3}(1/3))$.

- Иногда показательные неравенства можно решить, используя свойства функций, входящих в обе части неравенства.

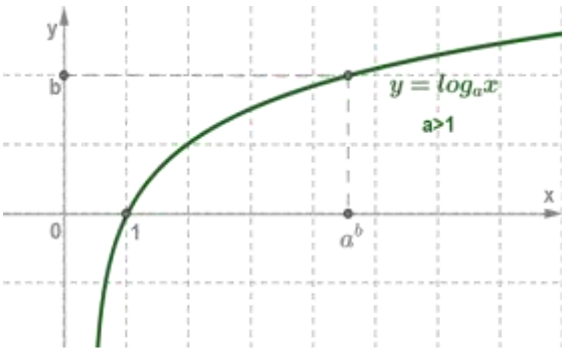
Пример 4. Решить неравенство $2^x+3^x+4^x<3$.

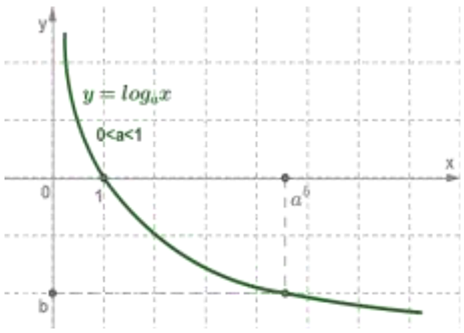
Решение. Каждая из функций $y=2^x$, $y=3^x$, $y=4^x$ непрерывна и возрастает на всей числовой оси. Значит такой же является и функция $y=2^x+3^x+4^x$. Легко видеть, что при $x=0$ функция $y=2^x+3^x+4^x$ принимает значение 3. В силу непрерывности и монотонности этой функции при $x>0$ имеем $2^x+3^x+4^x>3$, при $x<0$ имеем $2^x+3^x+4^x<3$. Следовательно, решениями данного неравенства являются все $x<0$.

Ответ: (-∞; 0).

Логарифмические неравенства

- Решение логарифмических неравенств основано на строгой монотонности логарифмической функции. Известно, что
  - при основании, большем единицы, логарифмическая функция возрастает,
  - при положительном основании, меньшем единицы, логарифмическая функция убывает.





- Неравенство вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

эквивалентно следующим системам неравенств:

  - при $a>1$ $f(x)>0$, $g(x)>0$, *имеем* $\mathbf{f(x)>g(x)}$;
  - при $0<a<1$ $f(x)>0$, $g(x)>0$, *имеем* $\mathbf{f(x)<g(x)}$.

- Аналогично, неравенство вида

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

эквивалентно следующим системам неравенств

  - при $a>1$ $f(x)>0$, $g(x)>0$, *имеем* $\mathbf{f(x)<g(x)}$;
  - при $0<a<1$ $f(x)>0$, $g(x)>0$, *имеем* $\mathbf{f(x)>g(x)}$.

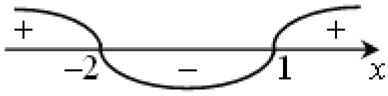
Пример 1. Решить неравенство:

$$\log_{0,2}(x^2+6x+8) > \log_{0,2}(5x+10).$$

Решение. Основание логарифмической функции меньше 1 (*a=0,2*). Поэтому, выписывая области определения выражений левой и правой частей неравенства и пользуясь свойством монотонности, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x^2+6x+8>0, \\ 5x+10>0, \\ x^2+6x+8<5x+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x+2)>0, \\ 5x>-10, \\ x^2+x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x+2)>0, \\ 5x>-10, \\ (x+2)(x-1)<0 \end{cases}.$$

Решение неравенства второй степени методом интервалов:



Совмещая промежутки, получим:

Ответ: (-2;1).

- Неравенства вида

$\log_a x>b$ или $\log_a x<b$, где $a>0$, $a\neq1$, также являются простейшими логарифмическими неравенствами.

- Неравенство вида

$$\log_a f(x)>b$$

эквивалентно следующим системам неравенств

- при $a>1$ *имеем* $\boldsymbol{f(x)>a^b}$**;**

заметим, что условие $f(x)>0$ *здесь выполнено автоматически*

- при $0<a<1$ $f(x)>0$, *имеем* $\boldsymbol{f(x)<a^b}$**.**

- Неравенство вида

$$\log_a f(x)<b$$

эквивалентно следующим системам неравенств

- при $a>1$ $f(x)>0$, *имеем* $\boldsymbol{f(x)<a^b}$**;**
- при $0<a<1$ *имеем* $\boldsymbol{f(x)>a^b}$**;**

заметим, что условие $f(x)>0$ *здесь выполнено автоматически*

Пример 1. Решить неравенство $\log_8(x^2-4x+3)<1$.

Решение. Так как основание логарифма больше единицы ($a=8$), то данное неравенство эквивалентно системе:

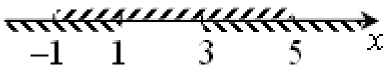
$$\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ x^2-4x+3<8 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}.$$

Каждое неравенство решим методом интервалов.

$x^2-4x+3=0$ при $x_1=1$, $x_2=3$. Определяя знаки, получим:

$x^2-4x-5=0$ при $x_1=-1$, $x_2=5$. Определяя знаки, получим

Совмещая промежутки, имеем:



Таким образом, $x\in(-1;1)\cup(3;5)$.

Ответ: $(-1;1)\cup(3;5)$.

- Более сложные логарифмические неравенства сводятся к простейшим методами, аналогичными используемым при решении логарифмических уравнений.

Пример 2. Решить неравенство:

$$2+\log_2\sqrt{x+1}>1-\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{4-x^2}.$$

Решение. Переходя к основанию 2 в выражении, стоящем в правой части данного неравенства, получим:

$$1+\log_2\sqrt{x+1}>\log_2\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_2 2+\log_2\sqrt{x+1}>\log_2\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_2 2\sqrt{x+1}>\log_2\sqrt{4-x^2}$$

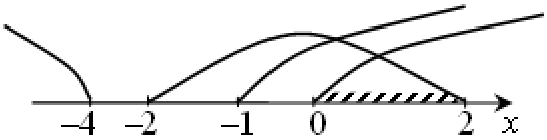
Теперь перейдем к равносильной системе (основание логарифма больше единицы – значит логарифмическая функция будет возрастающей):

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}>0,\\ \sqrt{4-x^2>0,}\\ 2\sqrt{x+1}>\sqrt{4-x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0,\\ 4-x^2>0,\\ 4(x+1)>4-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,\\ x^2-4<0,\\ x^2+4x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,\\ (x+2)(x-2)<0,\\ x(x+4)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,\\ -2<x<2\\ \left[\begin{array}{l}x>0,\\ x<-4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<2$$

Здесь решение квадратичных неравенств осуществлено методом интервалов:

Совмещая промежутки, получим $0<x<2$.



Неравенства с переменным основанием логарифма

Теорема (так называемый метод рационализации неравенств по переменному основанию). *Логарифмическое неравенство*

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$$

равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Пример. *Решить неравенство*

$$\log_{x-2}(x^2-1) > \log_{x-2}(2x^2+x-3).$$

Решение. Воспользуемся теоремой и получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ x-2 \neq 1, \\ x^2-1 > 0, \\ 2x^2+x-3 > 0, \\ ((x-2)-1)((x^2-1)-(2x^2+x-3)) > 0. \end{cases}$$

Решая первые четыре неравенства, находим ОДЗ исходного неравенства:

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ x < -1 \text{ или } x > 1, \\ x < -\dfrac{3}{2} \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

Откуда: $x \in (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Решим теперь пятое неравенство системы. После элементарных преобразований получим неравенство

$$(x-3)(-x^2-x+2) > 0.$$

Умножим второй сомножитель на -1 и поменяем знак неравенства:

$$(x-3)(x^2+x-2) < 0.$$

Нетрудно заметить, что корнями второго множителя в этом неравенстве являются числа 1 и -2. Поэтому, раскладывая второй множитель на одночлены первого порядка, получаем:

$$(x-3)(x-1)(x+2) < 0.$$

Это неравенство легко решить методом интервалов: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 3)$.
С учетом найденной ранее ОДЗ, получаем окончательный ответ.
Ответ: $x \in (2, 3)$.

Системы неравенств

Пример. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \dfrac{x+4}{(x-5)^{10}} \ge -10, \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{50x^2 + x - 7}{x-7} \le 1. \end{cases}$$

Первое неравенство может быть решено по методу «рационализации». Областью определения служат все $-4 < x < 5,\ x \ne 4$. На этой области

$$\log_{5-x}(x+4) - \log_{5-x}(5-x)^{10} \ge -10 \quad \text{или} \quad \log_{5-x}(x+4) - 10 \ge -10,$$

откуда

$$\log_{5-x}(x+4) \ge \log_{5-x} 1.$$

По вышеприведенной теореме имеем

$((5-x)-1))((x+4)-1) \ge 0$ или $(4-x)((x+3) \ge 0$, откуда $-3 \le x \le 4.$

С учетом области определения получаем $-3 \le x < 4.$

Во втором неравенстве системы (согласно результату решения первого неравенства) знаменатель будет отрицательным. Выполним почленное деление числителя на знаменатель в дроби:

$$x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2}{x-7} + 1 \le 1, \quad x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2}{x-7} \le 0, \quad x^2(x + 8 + \frac{50}{x-7}) \le 0;$$

умножая обе части на $x - 7 < 0,$ получим

$x^2(x^2 + x - 6) \ge 0,$

откуда, применяя метод интервалов, будем иметь

$x = 0,$ либо $x \le -3,$ либо $x \ge 2.$

С учетом решений первого неравенства системы (пересекая множества), получаем

$$x = -3,\ x = 0,\ 2 \le x < 4.$$

Дополнительные «шаблоны»

Неравенство вида $|f(x)| < |g(x)|$

Правило 1: Знак разности модулей $|f(x)| - |g(x)|$ совпадает со знаком произведения $(f(x)-g(x))\,(f(x)+g(x))$.

Правило 2: Знак выражения $|f(x)| - \sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком выражения $(f(x))^2 - g(x)$ в ОДЗ.

Пример:

$$(\sqrt{3x+5} - \sqrt{x+3})(|x-4| - x^2 - 2) < 0$$

Решение:

1. ОДЗ: $\begin{cases} 3x+5 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$

2. Выполняем равносильные преобразования по знаку по правилам:

$$(3x+5-x-3)((x-4)^2 - (x^2+2)^2) < 0$$

Решаем методом интервалов, учитывая ОДЗ, получаем ответ.

Ответ: $-2 < x < -1$; $x > 1$.

Правило 4: Знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ.

Пример 3:

$\log_{\left|x-\frac{7}{4}\right|}(\log_{\frac{1}{2}} x) \leq 0$

Решение:

1. ОДЗ: $\begin{cases} \left|x-\frac{7}{4}\right| \neq 1 \\ \left|x-\frac{7}{4}\right| > 0 \\ \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$
2. Воспользуемся условием равносильного перехода по знаку для логарифмической функции по правилу 2 и для модуля по правилу 1:

   $(\left|x-\frac{7}{4}\right|-1)(\left(\log_{\frac{1}{2}} x - 1\right)) \leq 0$

   $(x-\frac{7}{4}-1)\,(x-\frac{7}{4}+1)(\frac{1}{2}-1)(x-\frac{1}{2}) \leq 0$
3. Решаем неравенство методом интервалов, учитываем ОДЗ и получаем ответ.

   Ответ: $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решите следующие неравенства

$\log_{x-3}(x^2+3x-4) \leq \log_{x-3}(5-x)$

$\log_{\sqrt{x}-1}(x-3\sqrt{x}+4) \geq \log_{\sqrt{x}-1}(x-1)$

$\log_{(x^2-1)}(x+3) < \log_{(x^2-1)}(2x-4)$

$(x-3)^{x^2+3x-4} \leq (x-3)^{5-x}$

$(\sqrt{x}-1)^{x-3\sqrt{x}+4} \geq (\sqrt{x}-1)^{x-1}$

$(x^2-1)^{x+3} < (x^2-1)^{2x-4}$