Задачи с практическим содержанием

Математической моделью объекта (системы, ситуации, процесса, явления) A относительно совокупности S его свойств называется соответствующий математический объект M (напр., аналитически заданная функция, уравнение, неравенство, система уравнений, неравенств и т.п.), исследование которого средствами математики и должно ответить на поставленные вопросы о свойствах S исходного объекта.

Математическое моделирование состоит из следующих этапов.

Этап 1. Построение так называемой содержательной модели в терминах исходной предметной области (называемая также концептуальной моделью).

Этап 2.Перевод содержательной модели на формальный математический язык, т.е. переход к собственно математической модели.

Этап 3. Изучение математической модели, т.е. решении полученной математической задачи.

Этап 4. Четвертый этап - интерпретация (истолкования) результата исследования математической модели, сопровождаемое «возвращением» в исходную предметную область.

Линейная зависимость. Закон сложения.

При решении задач на составление уравнений часто применяют стандартные схемы построения так называемого *оператора модели* (уравнения, неравенства, системы уравнений, неравенств и др). Одной из таких схем является использование
линейной зависимости. Такая зависимость действует в следующих задачах.

1. Задачи на движение: линейная зависимость между переменными S (длина пути, пройденного прямолинейно движущимся телом), v (скорость равномерного движения) и t (время движения).
2. Задачи на тему «Работа»: линейная зависимость между объемом работы A, производительностью v и временем выполнения работы t.
3. Задачи на тему «Смеси, сплавы»: линейная зависимость между массой смеси (сплава) M, концентрацией вещества c и объемом V.

Оператор модели в этих случаях – это «аддитивный закон» (закон сложения):

1. Встречное движение: расстояние между пунктами равно сумме отрезков пути, пройденных участниками движения до их встречи.
2. Совместная работа: весь ее объем складывается из долей, выполненных участниками.
3. Смеси, сплавы: масса M всей смеси (сплава) складывается из масс ее (его) компонент; масса чистого вещества m в смеси (сплаве) складывается из масс чистого вещества в каждом компоненте.

Переменные	Локальная линейная зависимость	Аддитивный закон (оператор модели)
Равномерное движение: S, v, t	$S=vt$	Встречное движение: $S=S_1+S_2$
Работа: A,v,t	$A=vt$	Совместная работа: $A=A_1+A_2+\ldots$
Смесь, сплав: M,c,V	$M=cV$	Смеси, сплавы: $M=M_1+M_2+\ldots$ $m=m_1+m_2+\ldots$

Решение полученной математической задачи есть решение уравнения или системы уравнений, определяемых оператором модели.

Задача 1. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 35% меди. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 25% меди. На сколько килограммов масса второго сплава больше массы первого?

Решение (моделирование ситуации).

1) Формализация. Введение переменных: x – масса первого сплава, y – масса второго; c_1 -содержание меди в первом сплаве (в процентах) , c_2 - во втором ; M - масса третьего сплава , c - содержание меди (в процентах) в третьем сплаве.

Компоненты «вектора входных переменных» (данные задачи):

$$c_1=5,\ c_2=35,\ M=225,\ c=25.$$

Компоненты «вектора выходных переменных» (искомые величины): $x,\ y$.

2) Закон линейной зависимости (применяется к составу каждого сплава):

$$m_1=c_1x\ ,\ m_2=c_2y,\ m=cM\ .$$

3) Применение аддитивного закона (оператор модели):

$$\begin{cases} x+y=225 \\ 0{,}05x+0{,}35y=0{,}25\cdot 225 \end{cases}$$

Теперь решаем полученную математическую задачу – систему уравнений; в ответе потребуется записать разность $y-x$.

Решить систему можно, например, следующим образом. Поделим на 0,05 первое уравнение системы, а далее – вычтем из второго уравнения первое. Мы получим $y=150$, а тогда (из первого уравнения системы) $x=75$. Итак, вектор выходных переменных имеет компоненты $x=75, y_2=150$.

Теперь искомое $x-y=75$.

«Сложные» проценты

Задача 1 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). 1 января 2015 года был взят в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем должник переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев может быть взят кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

Решение. Ясно, что чем больше месячные выплаты, тем быстрее будет выплачен долг. Значит, срок кредита будет минимален в том случае, когда выплаты составляют 220 тыс. рублей. Попробуем непосредственно подсчитать по годам оставшийся долг при указанной схеме выплаты кредита. Составим таблицу, в первом столбце которой будем указывать долг на первое число месяца, а во втором — долг в том же месяце, но уже после выплаты. Для упрощения расчётов будем сохранять только два знака после запятой, представляя суммы долга в тыс. рублей.

Так, в результате первого начисления процентов останется долг $1100+0{,}02\times1100 ==1122$; а после выплаты «транша» : $1122 - 220=902$ (тыс.руб.).

Действуя подобным образом и далее, будем иметь

Месяц	Долг на первое число месяца (тыс. руб)	Долг после выплаты (тыс. руб)
1	1122	902
2	920,04	700,04
3	714,04	494,04
4	503,92	283,92
5	289,60	69,60
6	70,99	0

Стоит заметить, что в последний месяц выплата составит менее 220 тыс. руб. Из таблицы видно, что минимальный срок кредита в условиях задачи составляет 6 месяцев.

Ответ: 6.

Задача 2 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). 31 декабря 2013 года был взят в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем должник переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы долг был выплачен тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Здесь (в сравнении с предыдущей задачей) непосредственный подсчет невозможен, но рассуждения будут аналогичными.

Пусть сумма кредита равна a, ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют k %. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0{,}01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1 + m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = a_2m - x = (am^2 - (1 + m)x)m - x$$

Или

$$a_3 = am^3 - \left(1 + m + m^2\right)x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x.$$

По условию тремя выплатами кредит должен быть погашен полностью, поэтому

$$am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x = 0,$$

откуда

$$x = \frac{am^3(m - 1)}{m^3 - 1}.$$

При a = 9 930 000 и k = 10, получаем: m = 1,1 и

$$x = \frac{9930000 \cdot 1{,}331 \cdot 0{,}1}{0{,}331} = 3993000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 3 993 000 рублей.

Рассмотрим теперь задачу, в которой предполагается не выплата кредита, а обратный процесс - накопление

Задача 3 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40%. К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение. Пусть банк первоначально принял вклад в размере s у.е. под x % годовых. Тогда к началу второго года сумма стала $s(1 + 0{,}01x)$ у.е.

После снятия четверти накопленной суммы на счету осталось

$$\frac{3s}{4}(1 + 0{,}01x)$$

условных единиц (у.е.)

С момента увеличения банком процентной ставки на 40% к концу второго года хранения остатка вклада накопленная сумма стала

$$\frac{3s}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)$$

у.е.

По условию задачи эта сумма равна $1{,}44s$ у.е.

Решим уравнение

$$\frac{3s}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)=1{,}44s.$$

Имеем

$$\frac{3s}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)=1{,}44s \Leftrightarrow (1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)=1{,}92 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-120\pm\sqrt{19600} \Leftrightarrow x=-120\pm 140.$$

$$x_1=20;\ x_2=-260$$

По смыслу задачи: x=20. Новые годовые составляют тогда 20 + 40 = 60 %.

Ответ: 60.

Задачи «максимизации» и «минимизации»

Задача 1 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение. Пусть в меньший класс распределено x мальчиков (где $1\le x\le 21$), тогда в больший класс попало ($23-x$) мальчиков. Доля мальчиков в меньшем классе есть x/21, в

большем – (23-x)/23. Значит, суммарная доля мальчиков в двух классах равна

$$\frac{x}{21}+\frac{23-x}{22}=\frac{x}{462}+\frac{23}{22}\ .$$

Получена линейная функция

$$y=\frac{1}{462}x+\frac{23}{22}$$

с положительным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на правом конце промежутка [1; 21], то есть

при $x = 21$. Таким образом, меньший класс полностью должен состоять из мальчиков, а в большем классе должно быть 20 девочки и 2 мальчика.
Ответ: В одном классе — 21 мальчик, в другом — 20 девочек и 2 мальчика.

Задача 2 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). На двух заводах за t^2 часов производится, соответственно, $2t$ единиц и $5t$ единиц продукции. Заказ на 580 единиц продукции надо распределить между этими заводами так, чтобы уплатить минимум зарплаты работникам. Каков будет объем выплаченной при этом зарплаты, если за 1 час работы на каждом заводе выплачивается зарплата 500 руб.?

Обсуждение. По видимому, работодателю выгоднее большую часть заказа передать второму заводу, на котором, судя по условию задачи, производительность труда намного выше. Следовательно, время выполнения заказа на каждом заводе будет различаться.

Решение. Пусть первый завод работает x^2 часов и производит при этом $2x$ единиц продукции, тогда как за y^2 часов на втором заводе производится $5y$ единиц продукции.

Следовательно,

$$2x+5y=580. \qquad (1)$$

При этом будет выплачена зарплата U=500 x^2 +500 y^2. Требуется, таким образом определить наименьшее значение функции U при условии (1). Теперь надо перейти к рассмотрению U как функции одного переменного. Это можно сделать, выразив, например, x из уравнения (1): x=290 -2,5y. Имеем

$$U=500\,(\,(290-2{,}5y)^2+y^2\,). \qquad (2)$$

Наибольшее значение этой функции определится при $y \geq 0$ с помощью стандартных средств математического анализа:
1)находим производную

$$U'=500\,(\,2(290-2{,}5y)(-2{,}5)+2y\,).$$

2) находим стационарные точки:

$$2(290-2{,}5y)(-2{,}5)+2y=0,\text{ откуда } y=100.$$

3) определив знаки производной левее и правее точки $y=100$, мы видим, что производная меняет свой знак с минуса на плюс; значит, при $y=100$ функция U меняет убывание на возрастание, то есть ее значение в точке $y=100$ является наименьшим. Это значение получаем, подставив в (2) $y=100$:

$$U(100)=5800000.$$

Дополнительные задачи.

Задача. Требуется позолотить ларец формы прямоугольного параллелепипеда (стенки и крышку) объема 72 куб. ед., у которого длина основания вдвое больше его ширины. При каких размерах ларца будет потрачено меньше всего позолоты.

Вектор входных переменных:

x- ширина основания;

$2x$ - длина основания;

y- высота.

Требование к результату в терминах содержательной модели: наименьшие затраты материала. Требование к результату в терминах математической модели: наименьшая площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда.

Оператор математической модели строится из следующих соображений:
1)выражение площади поверхности через компоненты вектора входных переменных x, y;
2) минимизация полученной функции двух переменных.

Оператор модели:

$$S = 2x \cdot x + 2(x + 2x)y,$$

$$S \mapsto \min.$$

Окончательная постановка задачи возможна путем связывания переменных x и y формулой объема, так что в результате минимизируемая площадь поверхности оказывается функцией одного переменного, наименьшее значение которой находим средствами дифференциального исчисления:

$$S = 2x^2 + 6xy;$$

$$V = 2x^2 y;$$

$$S = S(x) \mapsto \min.$$

Прогноз результата: при нахождении точки x наименьшего значения функции $S = S(x)$ определятся размеры ларца, на который уйдет наименьшее количество позолоты.

Теперь алгоритм решения задачи реализуется следующим образом.

1) $y = \dfrac{72}{2x^2}$;

2) $S = 2(x^2 + \dfrac{108}{x}),\ x > 0.$

3) Далее находим критические точки функции $S = S(x)$:

$$S' = 2(2x - \frac{108}{x^2}); \quad 2(2x - \frac{108}{x^2}) = 0,$$

откуда $x^3 = 27$, $x = 3$. Непосредственным исследованием знаков производной убеждаемся, что найденное значение $x = 3$ служит точкой минимума функции $S = S(x)$.

4) В условиях данной задачи при $x = 3$ поверхность ларца (боковая поверхность плюс крышка) будет наименьшей. Следовательно, искомые размеры ларца: ширина $x = 3$; длина $2x = 6$; высота $y = 4$.

Результат интерпретируется следующим образом: при размерах $6 \times 3 \times 4$ на позолоту уйдет наименьшее количество материала.

Задачи для самостоятельного решения

1. Расстояние между городами А и В равно 650 км. Из города А в город В со скоростью 55 км/ч выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 80 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

2. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 20 часов. Через 2 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

3. В среду акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а в четверг подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 64% дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?

4.Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк 3/4 от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

5.Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации;
$25 < t < 55$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3364 Гбайт?