От математической грамотности к фундаментальному школьному математическому образованию

Шевкин Александр Владимирович,
Заслуженный учитель РФ, к.п.н.,
стаж работы в школе 44 года,
один из авторов учебников
математики серии «МГУ-школе»,
С.М.Никольский и др., Просвещение.
avshevkin@mail.ru www.shevkin.ru

Что такое математическая грамотность?

Уважаемые коллеги!

В последние годы в методических журналах и других СМИ нам часто сообщают о результатах международных исследований, в которых участвует Россия.

«Результаты международного исследования качества общего школьного образования PISA показали, что в России уровень знаний учащихся школ находится ниже средних показателей по Организации экономического сотрудничества и развития (ОЭСР).

В международном исследовании, завершившемся в 2015 году, приняли участие 40 тысяч учеников из 72 стран возрастом 15 лет.

Что такое математическая грамотность?

Проверялся уровень знаний учащихся по математике, естественным наукам, **командной работе при решении проблем** и чтении. Особое внимание уделялось науке, которая становится все более важной составляющей современного общества и экономики.

Первое место в рейтинге занял Сингапур, за ним Япония и Эстония. **Россия расположилась на 33-й строчке рейтинга…** Эксперты отметили улучшение показателей учащихся российских школ по математике и чтению…

07.09.2017 С.Собянин сообщил 6-м месте в мире, занятом школьниками Москвы в исследовании PISA при проверке качество читательской и математической грамотности.

https://www.m24.ru/news/%d0%be%d0%b1%d1%80%d0%b0%d0%b7%d0%be%d0%b2%d0%b0%d0%bd%d0%b8%d0%b5/07092017/11224?utm_source=CopyBuf

Что такое математическая грамотность?

В исследовании отмечается, что российские школьники **плохо умеют использовать основные или так называемые повседневные научные знания для интерпретации данных**, что не позволяет учащимся находить правильный научный вывод. Что касается математики, то они **испытывают затруднения при вычислении примерной стоимости объекта в иной валюте**, а также **затрудняются при сравнении расстояния между двумя альтернативными маршрутами**. Проблема в чтении касается того, что отстающие не могут выразить ключевую идею текста». http://fulledu.ru/news/school/news/3660_pisa-uroven-znaniy-rossiyskih-shkolnikov-nizhe-sre.html

Что такое математическая грамотность?

Не драматизируя результаты российских школьников в этом исследовании, отмечу, что к качеству заданий PISA много претензий. Здесь я ссылаюсь на авторитетные мнения и академика РАН Виктора Анатольевича **Васильева**, и старшего научного сотрудника химфака МГУ Анатолия Владимировича **Краснянского.**
http://avkrasn.ru/article-54.html
http://avkrasn.ru/article-4098.html

Рассмотрим примеры из другого исследования — Международного сравнительного мониторингового исследования качества математического и естественнонаучного образования TIMSS за 2015 год по восьмым классам.

Что такое математическая грамотность?

Пример 1. Чему равно 3^3? (*Россия: 84%, средний: 70 %*)

Пример 3. Георгий и Кирилл купили одинаковые хоккейные клюшки в разных магазинах. Обычная цена таких клюшек в этих магазинах была одинаковой. Георгий купил клюшку, заплатив на 20 % меньше обычной цены. Кирилл заплатил 3/4 обычной цены. Кто из ребят меньше заплатил за свою клюшку? (*Россия: 30%, средний: 29 %*)

Пример 4. За выполнение 4 тестов по математике Артём из 10 возможных баллов получил: 9, 7, 8, 8. Он должен выполнить ещё один тест, за который можно получить максимально 10 баллов. Артём хочет, чтобы его средняя оценка по всем тестам была 9 баллов. Есть ли у него возможность это сделать? Объясните свой ответ.

(*Россия: 27%, средний: 25 %*)

Немного истории

Приведённые задания гораздо ближе заданий PISA к тому, чему мы учим! Но результаты не радуют. В чём же причины? На мой взгляд, их несколько. Начну издалека.

В заключении «Аналитической записки о образовании в СССР (1959)» читаем: «Государства, самостоятельно соревнующиеся с СССР, впустую растрачивают свои силы и ресурсы в попытках, обречённых на провал. Если невозможно постоянно изобретать методы, превосходящие методы СССР, стоит всерьёз задуматься над заимствованием и адаптацией советских методов». http://statehistory.ru/4316/Analiticheskaya-zapiska-NATO-ob-obrazovanii-v-SSSR-1959-g-/

Немного истории

Потом, следуя постановлениям партии и правительства, политическим и идеологическим решениям, ошибочным по отношению к образованию, сначала ввели условные переводы оставленных на второй год, потом и вовсе отказались от идеи оставления на второй год — я бы и не возражал против этой меры, но ничего реально не сделали, финансов не выделили для работы с отстающими и не желающими учиться школьниками. Всю ответственность за результаты учебного труда сняли с отстающих и ленивых учащихся и переложили на учителя. Пышным цветом расцвела процентомания, учащиеся получили ясный сигнал: в школе можно не напрягаться, "тройка" гарантирована.

Немного истории

Вы много найдёте взрослых людей, которые будут хорошо работать, если, независимо от результатов их труда, им гарантируют 60% от зарплаты лучших работников? Такая система оплаты труда расхолодила бы не только бездельников, но и старательных работников.

Как известно, нам не удалось реализовать коммунистический принцип оплаты труда взрослых: «От каждого по способностям — каждому по потребностям», но мы упорно сохраняем этот принцип в оценке учебного труда школьников: незаработанные 3 балла — это как раз 60 % от 5 баллов.

Немного истории

Ещё одна причина — влияние некоторых просчётов реформы математического образования середины 60-х годов прошлого века, часть из них я затрону ниже. Нельзя не сказать про 11-летний всеобуч, превращённый из права учащегося на получение образования в обязанность учителя положительно оценить его работу любого качества. Чего уж удивляться тому, что ещё в СССР уровень образования существенно упал по сравнению с 1959 годом?

А в последние 20-25 лет, как мне кажется, уровень образования подрастающего поколения понижали целенаправленно. Официально такая цель не объявлялась, но все предпринимаемые меры чудесным образом приводили именно к такому результату.

Немного истории

Мы помним заявления "реформаторов" образования, что «столько математики нам теперь не нужно». Математику серьёзно урезали в часах в начальной школе — как раз там, где закладываются основы последующего обучения, в среднем и в старшем звене, где добавили много нового. Перегрузку компенсировали введением ОГЭ и ЕГЭ — выделили ограниченный список задач, которые никак не характеризуют освоение программы и готовность к изучению математики на следующем этапе обучения. Учебный процесс перегрузили ложными целями, идущими от системно-деятельностного подхода так, что он уже не может давать прежних результатов.

Впрочем, прежние результаты и не планировались.

Немного истории

По словам министра образования и науки РФ А.А. Фурсенко «недостатком советской системы образования была попытка формировать человека-творца, а сейчас задача заключается в том, чтобы взрастить квалифицированного потребителя, способного квалифицированно пользоваться результатами творчества других.»

Учительская газета, 31.08.2004

Это полная капитуляция перед западными заказчиками «реформы» образования в России.

Немного истории

«Реформаторы» образования нигде и никогда не отчитывались о результатах внедрения своих идей в школьную практику. А если пытались аргументировать свою деятельность, то получалось примерно так:

«У нас понятий по физике за весь школьный курс 1300, в Англии — 600, в Штатах — 300. Нобелевских лауреатов по физике почему-то больше в Соединенных Штатах. Нас, что — устраивает такое содержание образования? Оно предельно устарело.»

Э.Д. Днепров, академик РАО, профессор ГУ – Высшая школа экономики, министр образования РФ, 1990–1992 гг.)

Что такое математическая грамотность?

Ориентацию процесса обучения на достижение математической грамотности — это программа-минимум, достойная цель в работе с самыми неспособными и ленивыми учащимися — школа должна выпустить их функционально грамотными, способными адаптироваться к жизни в обществе. Для остальных учащихся это только первый этап освоения математики. Но нам так часто и так настойчиво говорят о недостатках в формировании математической грамотности, как будто это и есть главная цель в школьном математическом образовании.

А это не так. Давайте обсудим решения задач.

Что такое математическая грамотность?

Наши казахстанские коллеги более определённо говорят о математической грамотности, их Единое национальное тестирование (ЕНТ), аналогичное нашему базовому уровню ЕГЭ, так и называется «Математическая грамотность». Вот задача 3 из этого тестирования.

3. В двух карманах было 150 монет. Затем семнадцать монет были перемещены из одного кармана в другой. В результате, количество монет во втором кармане стало в два раза больше, чем в первом. До перемещения в первом кармане было

A) 85 монет
B) 50 монет
C) 87 монет
D) 75 монет
✔ E) 67 монет

$$(x-17)+2(x-17)=150$$
$$x-17+2x-34=150$$
$$3x=201$$
$$x=67$$

Что такое математическая грамотность?

Специалист, обучавший в Интернете выпускников казахстанской школы, применял уравнение. А задача решается проще арифметическим способом.

Определим, сколько монет стало в первом кармане после их перекладывания, для этого решим «задачу на части» — как мы учим в учебнике для 5 класса. Пусть новое число монет в первом кармане составляет 1 часть, тогда во втором — 2 части.

1) 1 + 2 = 3 (части) — приходится на 150 монет;

2) 150 : 3 = 50 (монет) — стало в первом кармане;

3) 50 + 17 = 67 (монет) — было в первом кармане первоначально.

Ответ. 67 монет.

Что такое математическая грамотность?

Задача 4.

4. На поверхности пруда плавает одна кувшинка, которая постоянно разрастается. Таким образом, площадь, которую занимают кувшинки, каждый день увеличивается в 2 раза. Через четыре недели вся поверхность пруда зарастает кувшинками. Если изначально на пруде будет две кувшинки, за сколько дней зарастет весь пруд?

A) 27
B) 21
C) 24
D) 14
E) 18

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

1) $b_1 = 1 \quad q = 2$

$b_{28} = 1 \cdot 2^{27} = 2^{27}$

2) $b_1 = 2 \quad q = 2$

$b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{27} = 2 \cdot 2^{26} =$

$n = 27$

Тот же специалист для решения задачи применял геометрическую прогрессию.

Что такое математическая грамотность?

Тогда как это обычная занимательная задача для 5-6 классов (математический фольклор). Похожая задача есть в нашей с И.Ф. Шарыгиным книжке «Задачи на смекалку» и в учебнике для 6 класса.

Решение. В описанном в задаче процессе две кувшинки будет спустя 1 день, значит, из 28 дней надо исключить этот 1 день. Получим 27 дней.

Ответ: 27 дней.

В другом варианте встретилась похожая задача и её решение показано также с помощью геометрической прогрессии.

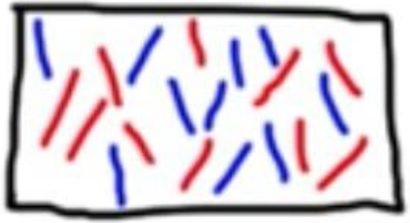
И, наконец, задача 5 из того же источника.

Что такое математическая грамотность?

5. В коробке лежат 10 синих и 10 красных ручек. Сколько ручек, не глядя в коробку, надо вынуть, чтобы среди них обязательно нашлось 4 ручки одного цвета?

A) 8
B) 6
C) 7
D) 5
E) 9

4 3
2 5
1 6



Решающий долго анализировал ответы для выбора, начиная с меньшего, вместо того, чтобы делать так, как мы учим в книжке «Задачи на смекалку». Рассмотрим худший случай. Пусть мы уже вынули 3 красные и 3 синие ручки — всё равно в каком порядке. Чтобы получить 4 ручки одного цвета — всё равно какого — достаточно вынуть ещё одну, т. е. всего надо вынуть 7 ручек.

Ответ: 7 ручек.

Что такое математическая грамотность?

Задачи ЕНТ «Математическая грамотность» сплошь и рядом не требуют серьёзной математики, хоть и не лишены занимательности. Они показывают две вещи:

— итоговый контроль на таких задачах при выпуске из школы серьёзно дезориентирует процесс обучения, уводя его в сторону от освоения основной программы, оставляя выпускников средней школы без среднего математического образования;

— к достижению даже так понимаемой «математической грамотности» надо относиться более ответственно.

Замечу, что наш ЕГЭ базового уровня также не подтверждает получение выпускниками среднего образования по математике.

Что такое математическая грамотность?

Так что же такое **математическая грамотность**? Ограничимся близким к интуитивному её толкованию, достаточному для сегодняшнего разговора.

Под **математической грамотностью** понимают готовность учащихся справляться с жизненными проблемами, для решения которых нужно использовать некоторые математические знания и умения.

Далеко не полный перечень умений включает:

— умение выполнять математические расчеты для решения повседневных задач;

— умение рассуждать, делать выводы на основе информации, представленной в различных формах (в таблицах, диаграммах, на графиках), широко используемых в СМИ.

Что такое математическая грамотность?

На мой взгляд, здесь явно не хватает пункта:

— умение выполнять простые математические доказательства, отличать «доказано» от «не доказано».

Математическая грамотность определяется и как «способность человека … понимать роль математики в мире, в котором он живёт, выражать хорошо обоснованные математические суждения, использовать математику так, чтобы удовлетворять в настоящем и в будущем потребности, присущие творческому, заинтересованному и мыслящему гражданину».

Представляется, что сводить математическую грамотность к потребностям человека, ещё не осознающего своих потребностей — это путь в никуда.

Если не математическая грамотность, то что?

Но всё течет, всё изменяется. Надеюсь, что введение антироссийских санкций, невозможность российским «квалифицированным потребителям» купить на Западе «результаты творчества других» отрезвили деятелей, наивно веривших в равноправное вхождение России в Западный мир. Сегодня только самые твердолобые из них не понимают, что Запад рассматривает Россию лишь как конечную часть своей пищевой цепочки. Их интересуют лишь наши ресурсы — минеральные, интеллектуальные, финансовые и т.п.

Выживание России в таких условиях гарантирует лишь обеспечение условий для развития фундаментального образования и создание внутри страны возможностей для самореализации хорошо образованных граждан.

Если не математическая грамотность, то что?

Необходимо сделать самоценными знания и квалификацию работника, а не баллы и дипломы об образовании. Только так можно обеспечить страну необходимыми кадрами, поднять уровни образования, медицины, производства, жизни.

В связи с этим обязательно возникнет вопрос об отказе от ориентации процесса обучения на программу-минимум, т. е. на формирование математической грамотности.

Обязательно будет поставлена задача, которая прозвучала в Послании Президента РФ В.В. Путина ФС : «Безусловно, важно сохранить глубину и **фундаментальность** отечественного образования» (1.12.2016).

Фундаментальность математического образования

Эти слова явно перпендикулярны потоку наставлений, нисходившему на школу с вершин управления образованием последние 20-25 лет. Для обеспечения потребности страны в хорошо подготовленных кадрах — преподавателей, учителей, ученых, инженеров, изобретателей — необходимо ставить цели выше задачи-минимум, которой уж очень увлеклись руководители образования и его «реформаторы».

Необходимо взять курс на возрождения **фундаментального подхода** к обучению школьников математике, который «реформаторы» уничижительно называли «излишним академизмом».

Фундаментальность математического образования

Фундаментальность образования, применительно к школьной математике, проявляется:

— с одной стороны, в построении школьного обучения на основе базовой науки-математики — с использованием доступного для учащихся содержания и способов действий;

— с другой стороны, в нацеленности процесса обучения на создание фундамента для последующего изучения математики и смежных школьных дисциплин, а также на подготовку к обучению в вузе.

Фундаментальность математического образования

Для достижения такого качества обучение должно быть систематическим — без частой смены объектов изучения (числа, буквенные выражения, уравнения, неравенства…, опять числа, …).

Обучение должно вестись крупными блоками, что позволяет достаточно хорошо продвигать сильных учащихся и поднимать на возможно более высокий уровень отстающих в учении. А частая смена объектов изучения приводит лишь к отставанию тех, кого можно в иных условиях выучить лучше. При этом, на мой взгляд, необходимо работать в трёх направлениях.

Фундаментальность математического образования

1. Надо показывать образцы построения математической теории, например, арифметику натуральных чисел, арифметику обыкновенных дробей — в полном объёме с более обоснованным изложением материала, а не на долях яблок лишь иллюстрирующих факты, которые можно получить в рамках математической теории.

При этом не ставится задача какого-то непосильного детскому возрасту теоретизирования, но знания должны осваиваться в научной системе, крупными блоками в научно обоснованной последовательности, что всегда было характерно для российской методики преподавания математики до колмогоровской реформы образования.

Фундаментальность математического образования

Иначе учащиеся будут применять инструменты математики без понимания того, почему они дают верные результаты. Необходимо развивать понятийное мышление школьников — сильную сторону традиционного российского образования, считать, что если сообщаемый факт можно обосновать в рамках математической теории и это обоснование не противно детскому восприятию, то так и надо делать, а не сообщать факты и рецепты действий, перегружая память и бесконечно повторяя не вполне осознаваемые действия. Зачем превращать повторение в мачеху учения?

Фундаментальность математического образования

В статье **Разрыв между умными и глупыми нарастает** Л.А. Ясюкова пишет: «…понятийное мышление можно определить через три важных момента. Первый — умение выделять суть явления, объекта. Второй — умение видеть причину и прогнозировать последствия. Третий — умение систематизировать информацию и строить целостную картину ситуации… По жизни сформировать понятийное мышление невозможно, оно приобретается только в ходе изучения наук, поскольку сами науки построены по понятийному принципу: в их основе базовые понятия, над которыми выстраивается пирамида науки».

http://www.shevkin.ru/novosti/razry-v-mezhdu-umny-mi-i-glupy-mi-narastaet-2/

Фундаментальность математического образования

2. Надо формировать осмысленные полные умения, которые, кроме прочего, требуют меньше времени для повторения, так как более надёжно сформированы и основаны на понимании объекта, над которым выполняются действия, и сути выполняемых действий. Надо сохранить **фундаментальность и систематичность** российского математического образования. А это существенно зависит от структуры учебника, по которому работает учитель, поэтому грамотный выбор учебников для решения стоящих перед школой задач будет и дальше существенным условием повышения уровня школьного математического образования.

Фундаментальность математического образования

Формированию осмысленных полных умений помогает доказательность изложения материала в учебнике и на уроке. Достаточно рано надо приучать школьников доказывать, тогда они будут понимать необходимость доказательства. Хочется, чтобы они не были похожи на ученика из следующей истории.

Рассказывают, что обучая математике очень тупого, но очень знатного ученика и не добившись понимания доказательства, д’Аламбер (1717–1783) в отчаянии воскликнул: «Ну, честное слово, сударь, эта теорема верна!» На что ученик ответил: «Сударь, почему Вы мне сразу так не сказали? Вы — дворянин, и я — дворянин; Вашего слова для меня вполне достаточно».

И.И. Баврин, Е.А. Фрибус. «Старинные задачи».

Фундаментальность математического образования

3. Надо развивать «инструментарий обучения» — и не только математике — мышление и речь учащихся. Здесь, кроме правильной работы с теоретическим материалом, на первое место выходит использование арифметических способов решения текстовых задач, дающих возможность познакомить учащихся со старинными задачами и старинными способами их решения. Это позволяет создавать положительный эмоциональный фон обучения и вводить его в исторический контекст, показывать связь математики с жизнью, с историей своего народа и всего человечества, что напрямую работает на развитие понимания роли математики в мире, в котором мы живём.

Фундаментальность математического образования

Коротко остановлюсь на каждом из этих предложений.

Порядок изучения чисел уже почти 50 лет таков: повторяют некоторые вопросы из натуральных чисел (без делимости), вводят обыкновенные дроби (без их основного свойства), сравнивают, складывают и вычитают сначала дроби, затем смешанные числа с общим знаменателем. Потом на этой базе, недостаточной для математического обоснования равенства 0,9 = 0,90, вводят десятичные дроби — с опорой на похожесть алгоритмов этих действий с алгоритмами действий с натуральными числами. Обоснования правил действий даются через метрические соотношения между величинами (за пределами изучаемой математической теории).

Фундаментальность математического образования

Помню, довелось мне рецензировать для ФЭС Минпроса СССР первую версию томских учебников. Там я обнаружил, как устанавливалось свойство десятичных дробей, выраженное равенством 0,9 = 0,90.

«Фрекен Снорк предложила засунуть число 0,9 в Шляпу. Так и сделали, и тотчас получили из Шляпы число 0,90.
— Вот оно что! — сообразил Хемуль. — Да ведь 0,9 = 0,90!»

Тогда я огорчил авторов учебника вопросом:

«Что должен ответить учитель, если для доказательства теоремы Пифагора ученик засунет в Шляпу *a*, *b*, *c* и вытащит оттуда требуемое равенство?»

Фундаментальность математического образования

Но вернёмся к порядку изучения чисел. В 6 классе возвращаются к натуральным числам (делимость, признаки делимости, НОД, НОК), потом доучивают обыкновенные дроби — сравнение, сложение и вычитание дробей с разными знаменателями, умножение и деление дробей. Далее вводят отрицательные числа — сразу на множестве всех рациональных чисел, что имеет свои трудности.

На мой взгляд, такое изучение чисел не способствует формированию у учащихся правильных представлений об объекте изучения и о построении математической теории. Как не способствует формированию представления о картине изучение её фрагментов, да ещё с перерывами в полгода или год.

Фундаментальность математического образования

Примеров обоснования фактов с выходом за пределы математической теории много в разных учебниках. Они иногда неизбежны, но в случаях, которые мы рассмотрим, уход от изложения материала на языке математической теории приводит к конфузам.

Во многих учебниках равенство 2:3 = 2/3 сообщается при первоначальном введении дробей, то есть ученики ещё не знают, что есть 2:3, а им доказывают равенство этого «неизвестно чего» дроби с помощью разрезания каждого из двух одинаковых яблок на 3 равные части.

До 1984 г. в учебнике Н.Я. Виленкина и др. этот факт пояснялся разрезанием двух сосисок без упоминания, что сосиски одинаковые.

Фундаментальность математического образования

Теперь появился новый учебник (А.Г. Мерзляк и др.) — в старые «мехи» учебника Н.Я. Виленкина и др. новые авторы влили новое «вино»: другие примеры, задачи... В примере с дробью они поступили «интереснее», они для четырёх пиратов делят три больших мешка с золотыми монетами на 4 равные части. Описанная в учебнике процедура годится только для случая, когда в каждом мешке число монет кратно 4. То есть в учебнике не получилась даже иллюстрация факта $3/4 = 3 : 4$. Зачем тогда такое украшательство и такая интересность?

Впрочем, при обычном порядке изучения дробей доказать в 5 классе равенство $2:3 = 2/3$ в рамках математической теории невозможно.

Фундаментальность математического образования

Допустимо сказать, что дробь 2/3 читается ещё как "2 делённое на 3", но тогда лучше добавить, что позже мы докажем равенство 2/3 = 2 : 3. И в 6 классе доказать:

$$2:3=\frac{2}{1}:\frac{3}{1}=\frac{2\cdot 1}{1\cdot 3}=\frac{2}{3}\ .$$

Иллюстрировать доказательство примером с долями яблока можно и нужно, чтобы новые знания увязывать с имеющимся жизненным опытом ребёнка, но надо понимать, что это иллюстрация, а не доказательство в рамках математической теории.

Объяснение математических фактов с выходом за пределы математической теории иногда неизбежно в силу особенностей восприятия младших школьников.

Фундаментальность математического образования

Например, переместительный закон сложения натуральных чисел можно объяснить сложением 3 красных и 2 синих карандашей в разном порядке. Научное доказательство потребовало бы введения аксиоматики натуральных чисел, что находится за пределами возрастных возможностей восприятия пятиклассников.

А сложение обыкновенных дробей уже можно объяснить в рамках математической теории, сначала на конкретном примере:

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}.$$

Фундаментальность математического образования

Приведённое доказательство легко сделать общим, заменив числа буквами. Вместо этого в учебниках обычно пишут:

Для дробей, как и для натуральных чисел, выполняются свойства сложения:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

Факт сообщен? — Да. Этого достаточно для чего? Для развития ребёнка? Или для наполнения его головы не связанными друг с другом фактами? Тогда к чему все разговоры про развитие при обучении математике, если моменты, на которых и надо развивать детей, учить их доказательствам, упускаются?

Фундаментальность математического образования

Правильное обучение математике предполагает обучение доказательствам. Для развития этого умения надо не упускать имеющиеся возможности. За этим мы тщательно следим в своих учебниках серии «МГУ–школе» (С.М. Никольский и др.), начиная с 5 класса. Например, в математике есть только один распределительный закон

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Мы не считаем необходимым вводить, как это было принято до нас, два распределительных закона — «для сложения» и «для вычитания», так как второй «закон» есть следствие первого. Чтобы доказать, что верно равенство $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$, надо к разности прибавить вычитаемое и убедиться, что получается уменьшаемое.

Фундаментальность математического образования

Сильные пятиклассники понимают и легко воспроизводят это доказательство.

Вот ещё одна хорошая задача на доказательство, решаемая в разделе «Натуральные числа».

- Докажите, что два соседних натуральных числа взаимно просты.

Пусть соседние натуральные числа n и $n + 1$ не являются взаимно простыми числами, то есть имеют общий натуральный делитель, больший 1. Тогда по свойству делимости разность $(n + 1) – n = 1$ делится на этот общий делитель, что невозможно. Следовательно, числа соседние натуральные числа взаимно просты.

Фундаментальность математического образования

Рассмотренное задание даёт один из первых примеров применения доказательства «от противного».

Наиболее рациональная система изучения чисел заключается в последовательном и по возможности более полном изучении каждого числового множества с использованием возможно большего числа доступных доказательств. В противном случае не создаются условия для формирования **полных знаний и умений.**

Что это такое? Поясним на примере. Учительница спрашивает ученика: умеешь решать задачи на сложение натуральных чисел? И даёт ему решить несколько задач.

Фундаментальность математического образования

Если он не только может решить предложенные задачи, но даже сам может составить задачу и решить её, то у него сформировано полное умение решать задачи на сложение натуральных чисел.

В процессе описанного выше массового обучения математике в 5-6 классах у школьников формируются неполные знания и умения: в пятом классе вроде бы изучили сложение обыкновенных дробей, а сложить 1/2 и 1/8 или 1/2 и 1/3 учащиеся не умеют. Вроде изучили деление десятичных дробей, но учитель должен долго оберегать своих учащихся от примеров типа 0,4 : 0,3.

Фундаментальность математического образования

Эффективным можно считать такое обучение, при котором ученик может быть уверен, что он овладел операциями над любыми числами данного множества, может решить не только любой пример учителя или из учебника, но и сам может составить такой пример и решить его. В этом случае можно говорить о сформированности **полного умения.**

И ещё. Для поддержания неполного умения требуется больше сил и времени на постоянное повторение не вполне надёжно усвоенного, поэтому формирование полных умений более эффективно.

Фундаментальность математического образования

В наших учебниках мы придерживаемся традиционного для российской школы — от Л.Ф. Магницкого до А.П. Киселева — порядка изучения числовых систем, что способствует формированию полных умений и делает обучение более эффективным. Мы стараемся сохранить **фундаментальность** в обучении математике.

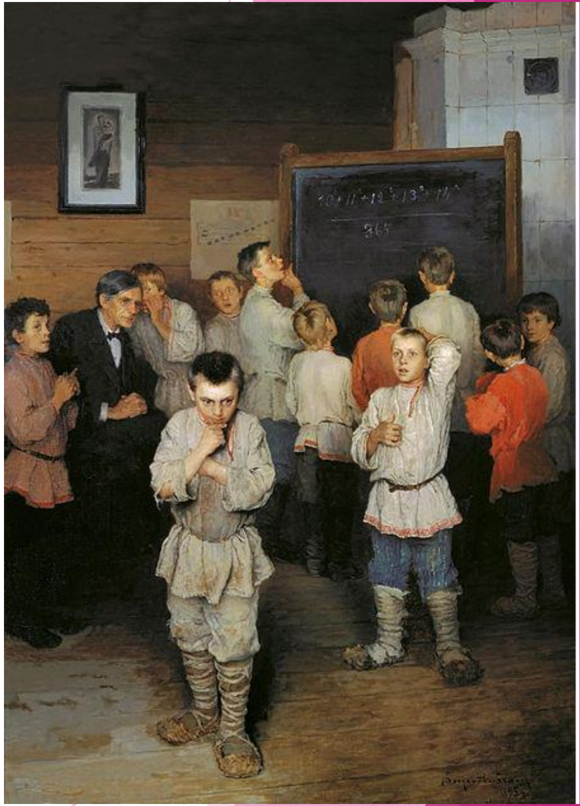
Неудовлетворённость учительской и родительской общественности результатами обучения «по стандартам» порождает попытки возврата к советским учебникам в начальной школе и в среднем звене. Появились призывы к писанию гусиными перьями для улучшения почерка детей, ещё немного и будем переобувать детей в лапти для улучшения устного счёта.

Фундаментальность математического образования

На уроке выдающегося учителя математики Сергея Александровича Рачинского крестьянские дети в лаптях вычисляют значение дроби $\dfrac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$.

Сравните с вычислением 3^3 из международного исследования!

Про лапти я шучу, против гусиного пера не возражаю, но про возвращение к старым учебникам надо сказать несколько слов.



Н.П. Богданов-Бельский. Устный счёт

Фундаментальность математического образования

В учебнике А.П. Киселёва сравнение обыкновенных дробей объяснялось через сравнение частей величины, выраженных с помощью этих дробей. Например, 1/2 > 1/4 потому, что 1/2 метра больше 1/4 метра. У него давалось 6 правил для объяснения умножения дробей — взять долю от натурального числа, потом взять дробь от натурального числа … и, наконец, взять дробь от дроби (перемножить числители, перемножить знаменатели и первый результат записать в числитель, а второй в знаменатель).

В самых распространённых учебниках сейчас даётся два правила: как умножить дробь на натуральное число и как умножить дробь на дробь — независимо друг от друга, из жизненных примеров.

Фундаментальность математического образования

Но можно поступить экономнее — дать только второе правило (определение), а первое получить из него как следствие. Так и сделано в нашем в учебнике.

Чтобы повысить уровень математической подготовки школьников, надо доступно и обоснованно строить изложение материала в учебниках и на уроке, избегая частой смены объектов изучения. Структура учебника и его задачное наполнение должны способствовать формированию полных знаний и умений, работе по формированию мышления не только с понятийным аппаратом учебника, но и при решении текстовых задач, устанавливающих связь изучаемого материала с жизнью.

Арифметические способы решения текстовых задач

Особое внимание при этом надо обратить на использование **арифметических способов решения текстовых задач**.

Повышения качества обучения математике можно добиться, развивая главный инструмент обучения — **мышление и речь** в процессе решения текстовых задач арифметическими способами. Так делали за 100 лет до нас и, я надеюсь, будут делать через 100 лет после нас.

Теперь уже многие родители и учителя плохо представляют, что это такое — арифметические способы решения текстовых задач, теряются в простых ситуациях. Не удивительно, многие из них учились «по Виленкину».

Арифметические способы решения текстовых задач

Вот пример из моей переписки в гостевой книге сайта www.shevkin.ru.

21. Имя: Елена, город: Москва

Скажите, пжта, где найти ответы и метод. рекомендации к каждому из упражнений Рабочей тетради Математика 5 класс, М.К. Потапов А.В. Шевкин… В разделе "Книги" не нашла. Мама ученицы 5 класса.

А.В. Ответы может найти каждый ученик самостоятельно. Если вдруг есть "непреодолимые" задания, то напишите мне на почту avshevkin@mail.ru .

01:10, 24.09.2014

Арифметические способы решения текстовых задач

22. Имя: Елена, город: Москва

... А Вы просчитывали какое количество учеников школ Москвы … останется без базовых знаний с учетом такого показателя как бестолковыеленивыеуставшие учителя, которые не умеют и/или не хотят увлечь наших детей математикой?... Может все-таки в качестве компенсации напишите для нас, родителей, …решения к … задачам? Уроки-то мы с ними делаем... Пишу после бессонной ночи, телефонных переговоров между родителями почти целого 5 класса. Решали задачи и придумывали как их изобразить схематично с № 61 по № 65 Рабочей тетради.

Не придумали. А многие родители и не смогли сами решить. Да мы еще и после Петерсон.

Арифметические способы решения текстовых задач

А.В. **61.** Разность двух чисел на 23 меньше первого из них. Найдите второе число.

Решение. Переформулируем вопрос: на сколько уменьшили первое число, если при вычитании получили ответ на 23 меньше первого числа (уменьшаемого)? Ответ: на 23, то есть второе число 23.

Примеры: 33 – 23 = 10, 45 – 23 = 22, ...

23. Имя: Елена, **город:** Москва

Как же просто!!!! А мы с уравнениями, да еще с двумя неизвестными... нарешали... как объяснить детям, чтобы их окончательно не запутать, голову ломали.

Спасибо...

Арифметические способы решения текстовых задач

До сих пор в 5-6 классах изучали только один способ решения всевозможных задач, который дети усваивают с большим трудом. Однажды моя коллега рассказала, как её попросил ученик:

Научите нас, пожалуйста, решать задачи «На пусть».

На мой взгляд, ребенок гениально выразил свою проблему: задачи разные, но все решения начинаются одинаково: «Пусть *x* — …», а что делать дальше, он не знает — в разных задачах надо действовать по-разному.

В новом варианте стандарта по математике нет уравнений.

Арифметические способы решения текстовых задач

Приведу примеры, показывающие, что такое арифметические способы решения и какие результаты даёт методика, реализованная в наших учебниках. Мы различаем несколько типовых задач, к решению которым подходим по-разному.

Это задачи, связанные с арифметическими действиями, задачи «на части», на нахождение двух чисел по их сумме и разности, на движение по реке, на движение, на совместную работу, на деление числа в данном отношении, на пропорции, на проценты и др.

Арифметические способы решения текстовых задач

Начнём с типовой задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности. Для решения задачи можно составить несложное уравнение, а можно рассуждать иначе, положив на стол две пачки тетрадей и сформулировав условия задачи.

- В двух пачках 70 тетрадей — в первой на 10 тетрадей больше, чем во второй. Сколько тетрадей в каждой пачке?

1) 70 – 10 = 60 (тетр.) — удвоенное число тетрадей во второй пачке,

2) 60 : 2 = 30 (тетр.) — тетрадей во второй пачке,

3) 30 + 10 = 40 (тетр.) — в первой пачке.

Арифметические способы решения текстовых задач

Рассмотрим ещё одну задачу,

- Мама раздала детям по 3 конфеты и у неё осталось 4 конфеты. Если бы у неё было ещё 6 конфет, то она могла бы раздать детям по 5 конфет. Сколько было детей?

Если бы у мамы было ещё 6 конфет, то после первой раздачи конфет у неё осталось бы 4 + 6 = 10 конфет. Каждому ребёнку она могла бы дать ещё по 5 – 3 = 2 конфеты. Детей было 10 : 2 = 5.

1) 4 + 6 = 10 (конфет) — стало бы у мамы,
2) 5 – 3 = 2 (конфеты) — мама дала бы каждому,
3) 10 : 2 = 5 (детей) — в первой пачке.

Арифметические способы решения текстовых задач

- *Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона*. Некто желает распределить между бедными деньги. Если бы у него было на восемь динариев больше, то он мог бы дать каждому по три, но он раздаёт лишь по два, и у него ещё остаётся три. Сколько бедных?

Решение. Представим, что некто раздавал сначала по 2 динария и у него осталось 3 динария. Если бы у него было на 8 динариев больше, то 11 динариев он распределил бы между всеми бедными, дав каждому ещё по 1 динарию. То есть бедных было 11.

Запишем это решение по действиям.

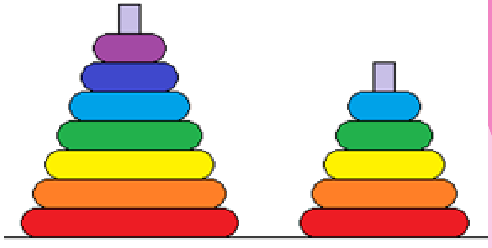
Арифметические способы решения текстовых задач

1) 3 + 8 = 11 (динариев) — можно раздать сверх выданных двух динариев.

2) 3 – 2 = 1 (динарий) — можно раздать каждому сверх выданных двух динариев.

3) 11 : 1 = 11 (бедных) — было.

- Для детского сада купили 20 пирамид: больших и маленьких — по 7 и по 5 колец. У всех пирамид 128 колец. Сколько было больших пирамид?



Представим, что все пирамиды по 5 колец, тогда колец было бы 100, надо добавить ещё 28 колец — по 2 на каждую пирамиду, то есть было 14 пирамид по 7 колец.

Арифметические способы решения текстовых задач

А дальше в учебнике идёт старинная китайская задача — здесь взяты «круглые» числовые данные.

- В клетке сидят фазаны и кролики. Всего у них 30 голов и 70 ног. Определите число фазанов и число кроликов.

Можно составить уравнение $4x + 2\cdot(30 - x) = 70$, где x — число кроликов, и получить ответ.

Но если мы обучаем детей не только для получения ответа в задаче, но и с целью развития их мышления и речи в процессе работы с нею, если нам небезразличен эмоциональный фон обучения, то полезно провести диалог, найденный мною у старых мастеров методики обучения математике и вызывающий у детей живейшее участие в решении задачи. Так решали эту задачу более 100 лет назад.

Арифметические способы решения текстовых задач

— Дети, представим, что на верх клетки, в которой сидят фазаны и кролики, мы положили морковку. Все кролики встанут на задние лапки, чтобы дотянуться до морковки. Сколько ног в этот момент будет стоять на земле?

— 60 (30x2 = 60).

— Но в условии задачи даны 70 ног, где же остальные?

— Остальные не посчитаны — это передние лапы кроликов.

— Сколько их?

— 10 (70 – 60 = 10).

— Сколько же кроликов?

— 5 (10 : 2 = 5).

— А фазанов?

— 25 (30 – 5 = 25).

Арифметические способы решения текстовых задач

- *Из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого.* Некий человек нанял работника на год, обещал ему дать 12 *р*. и кафтан. Но тот, отработав 7 месяцев, захотел уйти и просил достойной платы с кафтаном. Хозяин дал ему по достоинству расчет 5 *р*. и кафтан. Спрашивается, какой цены тот кафтан был.

Алгебраическое решение задачи приводит к уравнению $\frac{x+12}{12}\cdot 7 = x+5$, где *x р*. — стоимость кафтана.

Ученица 6 класса Андреева Аня предложила вычислить стоимость одного месяца работы проще: работник не получил 12 – 5 = 7 (*р*.) за 12 – 7 = 5 (месяцев), поэтому за 1 месяц ему платили 7 : 5 = 1,4 (*р*.), а за 7 месяцев он получил 7·1,4 = 9,8 (*р*.), тогда кафтан стоил 9,8 – 5 = 4,8 (*р*.).

Её ответ закончился аплодисментами класса.

Арифметические способы решения текстовых задач

- По преданию, основательница чешского государства принцесса Либуша обещала отдать свою руку тому из трёх женихов, кто сумеет решить задачу: “Если бы я дала первому жениху половину слив из этой корзины и ещё одну сливу, второму жениху половину оставшихся слив и ещё одну сливу, а оставшиеся сливы поделила пополам и половину их и ещё три сливы дала бы третьему жениху, то корзина опустела бы”. Сколько слив в корзине?

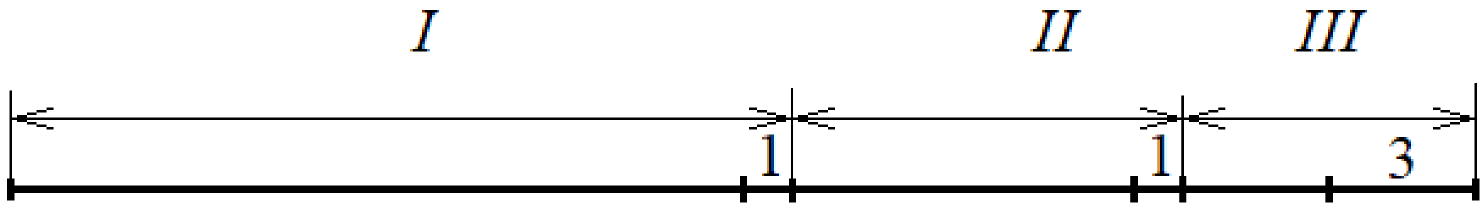
Решение восьмиклассников с исправленной мною ошибкой:
Пусть первоначально в корзине было *x* слив…

$$\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{9}{4}=x, \quad \ldots\ x = 30.$$

https://infourok.ru/uchebnotvorcheskiy-proekt-avtori-uchaschiesya-a-klassa-757344.html

Арифметические способы решения текстовых задач

А вот решение, той же задачи, но сформулированной про отца, трёх детей и раздачу рублей (5 класс, № **1078**, а). Это решение готовится на более простых задачах.



1) 3 + 3 = 6 (руб.) – III брату,

2) (6 + 1) · 2 = 14 (руб.) – II и III братьям вместе,

3) (14 + 1) · 2 = 30 (руб.) – денег было всего.

Выигрыш арифметического способа над алгебраическим очевиден, но нельзя утверждать, что так будет всегда.

Арифметические способы решения текстовых задач

А вот задача «на совместную работу» для 5 класса.

- Один ученик уберёт класс за 20 мин, а второй за 30 мин. За сколько минут они уберут класс при совместной работе?

Её решение готовится с самого начала введения дробей большим числом вопросов типа:

- Ученик уберёт класс за 20 мин. Какую часть класса он убирает в минуту?
- Ученик убирает за минуту 1/12 класса. За сколько минут он уберёт класс?

Решение задачи приводит к сложению дробей.

Забавная история приключилась с изменённой в первой строке задачей С. Сатина, которую мы включили в учебник.

Арифметические способы решения текстовых задач

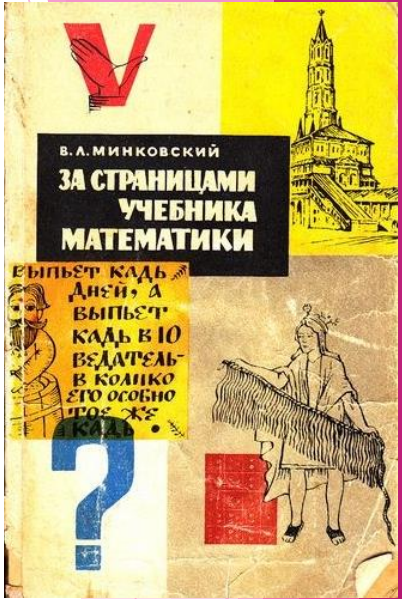
- За пять недель пират Ерёма
  Способен выпить бочку рома.
  А у пирата у Емели
  Ушло б на это две недели.
  За сколько дней прикончат ром,
  Пираты действуя вдвоём?

Некая дама написала письмо в минобрнауки, обвинила авторов учебника «в пропаганде алкоголя». Пришлось сочинять плохую копию задачи.

- За пять недель маляр Истомин
  Покрасит стены в целом доме.
  А лучший мастер Глеб Куделин
  Покрасит стены в две недели.
  За сколько дней, нам интересно,
  Они всё сделают совместно?

Арифметические способы решения текстовых задач

- *Из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого*. Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, а с женою выпьет ту же кадь в 10 дней. Спрашивается, в сколько дней жена его отдельно выпьет ту же кадь.



В учебнике мы приводим старинное решение задачи.

За 140 дней человек выпьет 10 бочонков, а вместе с женой за 140 дней они выпьют 14 бочонков. Значит, за 140 дней жена выпьет 14 – 10 = 4 бочонка. Один бочонок она выпьет за 140 : 4 = 35 дней.

Здесь для решения задачи делается предположение, что муж и жена пили свой квас 140 дней, т. е. здесь проводится мысленный эксперимент. Применим тот же приём для решения следующей задачи.

Арифметические способы решения текстовых задач

- *ЕГЭ, 2009.* Маша и Настя могут вымыть окно за 20 *мин*. Настя и Лена могут вымыть это же окно за 15 *мин*, а Маша и Лена — за 12 *мин*. За какое время девочки вымоют окно, работая втроём?

Задачу можно решить арифметически.

Пусть у нас было две Маши, две Насти и две Лены, причём девочки с одинаковыми именами работали с одинаковой производительностью. Тогда за 60 *мин* Маша и Настя вымоют 3 окна, Настя и Лена вымоют 4 окна, а Маша и Лена вымоют 5 окон. За 60 *мин* 6 девочек при совместной работе вымоют 3 + 4 + 5 = 12 (окон). Тогда Маша, Настя и Лена за 60 *мин* вымоют 6 окон, а одно окно они вымоют за 60 : 6 = 10 (*мин*).

Арифметические способы решения текстовых задач

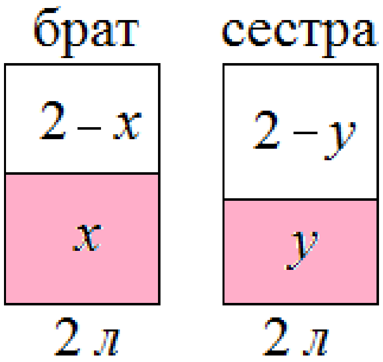
А это «автобиографическая» задача. Как-то раз с мамой и племянниками отправились мы в Тверской области в лес за малиной. Племянник всё время просил меня загадать задачку, а когда они закончились, я начал сочинять новую задачу «на злобу дня».

- Брат и сестра собирали малину в двухлитровые бидоны. Брат собирал ягоды быстрее сестры. Через некоторое время он решил ей помочь и поменялся с ней бидонами. Момент для обмена был выбран удачно — ребята наполнили их ягодами одновременно. Сколько литров ягод они набрали вместе до того, как поменялись бидонами?

Арифметические способы решения текстовых задач

Вот моё «взрослое» решение, которое мне хотелось дать в начале 8 класса для повторения алгебраического материала.

Пусть брат до обмена бидонами собрал *x л*, а сестра *y л* ягод, тогда после обмена брат собрал (2 – *y*) *л*, а сестра (2 – *x*) *л* ягод. Брат собирал ягоды быстрее сестры в одно и то же число раз до и после обмена бидонами, поэтому *x* больше *y* во столько же раз, во сколько (2 – *y*) больше, чем (2 – *x*).



Составим уравнение:

$$\frac{2-y}{2-x}=\frac{x}{y}.$$

Арифметические способы решения текстовых задач

Умножив уравнение на отличное от нуля произведение $y(2 - x)$, получим квадратное уравнение, которое преобразуем:

$$x^2 - 2x + 2y - y^2 = 0,$$

$$(x - y)(x + y - 2) = 0.$$

Из условия задачи следует, что первый множитель не нуль, тогда $x + y = 2$. Это и требовалось определить.

А вот «детское» решение без уравнения моего ученика Просина Дениса (школы № 679, Москва). Брат должен поменяться с сестрой бидонами в тот момент, когда ему останется собрать ровно столько ягод, сколько к этому моменту собрала сестра. Тогда после обмена бидонами каждый из них соберёт столько же ягод, сколько и до обмена, а вместе — ровно половину от объёма двух бидонов, т. е. 2 *л.*

И на этот раз в классе были аплодисменты.

Арифметические способы решения текстовых задач

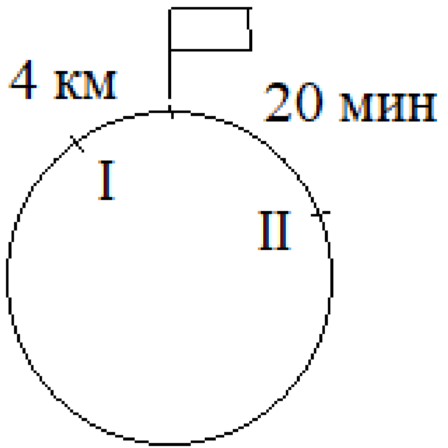
С этой задачи началась серия задач «с обменом местами работы». Следующая задача получилась переформулировкой моей задачи про сбор малины в журнале «Квант».

- Сулико подошла к роднику с двумя пустыми кувшинами. Один вмещал 5 л, а другой — 4 л. Вода из родника текла двумя струями — одна сильнее, другая слабее. Сулико одновременно подставила кувшины под струи и, когда набралась половина меньшего кувшина, поменяла кувшины местами. Как это ни удивительно, но кувшины наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды даёт одна струя, чем другая?

Так началась интересная серия задач, вошедших позднее в наши учебники.

Арифметические способы решения текстовых задач

- *ОГЭ, 2016*. Два бегуна стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 4 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 20 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 11 км/ч меньше скорости второго.



По действиям решение можно записать так.

1) 11·1 = 11 (км) — на 11 км второй бегун удалился от первого за 1 ч.
2) 11 – 4 = 7 (км) — пробежал второй бегун за 20 мин (1/3 часа);
3) 7 : 1/3 = 21 (км/ч) — скорость первого бегуна;
4) 21 – 11 = 10 (км/ч) — скорость второго бегуна.

Арифметические способы решения текстовых задач

Завершим разговор тем, с чего начали — разбором решений задач с ЕНТ-2017 «Математическая грамотность» (Казахстан).

18) В зоомагазине продаются маленькие и большие птицы. Большая птица вдвое дороже маленькой. Малика купила 5 больших птиц и 3 маленькие. Если бы она вместо этого купила 3 больших и 5 маленьких птиц, то потратила бы на 20 долларов меньше. Сколько стоит каждая из птиц?

A)12$ и 24$

B)25$ и 50$

C)18$ и 36$

D)40$ и 20$

E)20$ и 10$

x – цена мал птицы

2x – бол птицы

$(5\cdot 2x + 3x) - (3\cdot 2x + 5x) = 20$

$x = 10$

Арифметические способы решения текстовых задач

Рассмотрим «детское» решение задачи Р.М. Смаллиана, в которой речь шла про леди в зоомагазине.

Так как большая птица стоит в два раза больше, чем маленькая, то первый раз заплачено столько, сколько стоят 5х2 + 3 = 13 маленьких птиц, а во второй раз столько, сколько стоят 3х2 + 5 = 11 маленьких птиц, т. е. 13 – 11 = 2 маленькие птицы стоят 20 долларов, столько же, сколько стоит 1 большая птица.

Маленькая птица стоит 20 : 2 = 20 долларов.

Ответ. 10 и 20 долларов.

Арифметические способы решения текстовых задач

Когда моему отцу был 31 год, мне было 8 лет, сейчас отец старше меня в 2 раза. Сколько лет мне сейчас?

A) 32
B) 39
C) 20
D) 48
E) 23

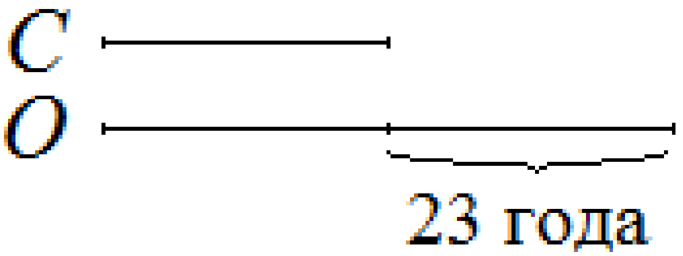
$31 + x = 2(8 + x)$ $\quad 8 + 15 = 23$

$31 + x = 16 + 2x$

$x = 15$

Решение. Папа старше сына на 31 – 8 = 23 года. Сейчас отец в 2 раза старше сына, пусть возраст сына – 1 часть, тогда возраст отца – 2 части.

1) 2 – 1 = 1 (часть) приходится на 23 года, это и есть возраст сына сейчас.



Ответ. 23 года.

Заключение

По нашим учебникам учащиеся хорошо выучиваются, показывают хорошие результаты в олимпиадах и на ОГЭ-ЕГЭ. Письмо «из глубинки».

Альфуся Борисовна Бахова (Нарткала). С 2006 г. работаю по Вашему УМК. И мне и детям очень нравится учиться по нему. Благодарю Бога, что в 2005 г. меня по ошибке направили на курсы, вместо библиотекаря… впервые о нашем УМК ... узнала там... Хочу поблагодарить Вас за материалы, которые Вы размещаете на своем сайте, они мне очень помогают. Счастлива, что мои выпускники поступая в разные ВУЗы страны, не самые худшие, а наоборот, их часто спрашивают преподаватели: «Где вы учились?», имея в виду их хорошие знания. Узнав, что они из глубинки, удивляются, что в глубинке дают такие знания. И это благодаря нашим учебникам, я в этом уверена! Еще раз разрешите поблагодарить Вас и в Вашем лице всех авторов УМК.

Заключение

С 2006 г. учебники для 5–12 классов вышли в переводе на армянский язык для 5-12 классов Армении. Учебники используются в городах РФ, где есть обучение на армянском языке. Издательства «Просвещение» и «Антарес».

Обложки некоторых учебников.

avshevkin@mail.ru www.shevkin.ru

В настоящий момент требования Программы по математике (2015) в части обучения детей в 5-6 классах решению задач арифметическими способами можно выполнить, работая по нашим учебникам. Этим вопросом мы занимаемся более 30 лет. Сделайте для своих учащихся изучение математики интересным!

СПАСИБО!