Метод подобия или алгебраический метод?

А.В. Шевкин,
ФМШ 2007, Москва

Сначала решим тремя способами задачу:

1. Два пешехода вышли одновременно из своих сел *A* и *B* навстречу друг другу. После встречи первый шел 27 минут до села *B*, а второй шел 48 минут до села *A*. Сколько минут они шли до встречи?

Решение. *I способ.* Пусть до встречи пешеходы шли x мин. Тогда первый был в пути (x + 27) мин, а второй (x + 48) мин. В минуту первый проходил $\frac{1}{x+27}$, а второй $\frac{1}{x+48}$ расстояния *AB*. Вместе они проходили в минуту $\frac{1}{x}$ расстояния *AB*. Составим уравнение:

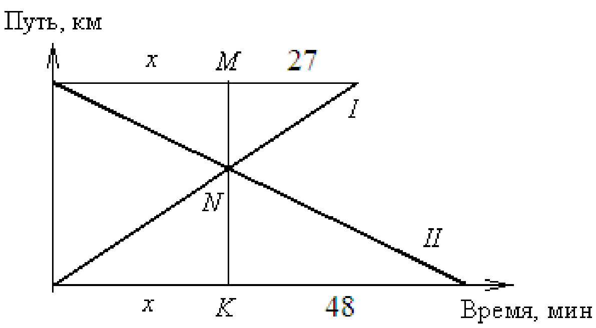
$$\frac{1}{x+27}+\frac{1}{x+48}=\frac{1}{x}.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень x = 36. Следовательно, пешеходы шли до встречи 36 мин.

II способ. Пусть до встречи пешеходы шли x мин. Так как скорости движения пешеходов постоянны, то до встречи и после встречи время движения второго пешехода больше времени движения первого пешехода в одно и то же число раз, то есть верно равенство: $\frac{x}{27}=\frac{48}{x}$, приводящее к тому же ответу.

Ту же пропорцию можно получить из геометрических соображений.

III способ. Пусть до встречи пешеходы шли x мин. Построим графики движения пешеходов.



Из подобия двух пар треугольников по двум углам следует, что

$$\frac{x}{27}=\frac{48}{x}.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень x = 36. Следовательно, пешеходы шли до встречи 36 мин.

Ответ. 36 мин.

В конце декабря 2015 года запланировал я для повторения дать знакомую учащимся задачу, решение которой когда-то было показано — с пешеходом, велосипедистом, автомобилистом и с другими числовыми данными. Для повторения задача была переформулирована.

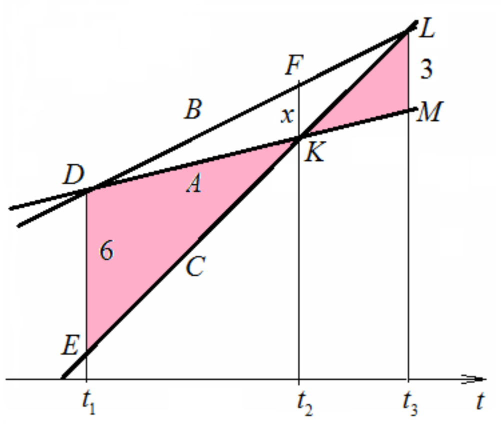
2. Однажды тёплым декабрьским днём отправились *A*, *B* и *C* по одной дороге из своего города в другой город за новогодними подарками для детей. Когда *B* догнал *A*, *C* отставал от них на 6 км. А когда *C* догнал *B*, *A* отставал от них на 3 км. На сколько километров *B* был впереди *C*, когда тот догнал *A*? Скорости всех участников движения постоянны.

Из литературы о вступительных экзаменах на рубеже 80-х годов прошлого века известно, что подобные задачи предлагались на конкурсных экзаменах в МГУ, причем абитуриенты решали их составлением системы, в которой число неизвестных было больше числа уравнений, некоторые из них делали удачную замену неизвестных, переходили к новой системе. В результате лишь немногие добирались до финиша. Позднее был придуман простой метод подобия для решения такого рода задач, и они перестали быть конкурсными.

В каждой моей подгруппе нашёлся ученик, показавший применение метода подобия для решения этой задачи.

Решение. *I способ.* Изобразим графики движения *A*, *B* и *C* в одной системе координат. Учтём, что скорость *B* больше скорости *A* и меньше скорости *C*.

В момент времени t_1, когда *B* догнал *A*, *C* отставал от них на 6 км, $DE = 6$ (все расстояния выражены в километрах). Пусть в момент времени t_2, когда *C* догнал *A*, *B* был впереди них на *x*, $FK = x$. В момент времени t_3, когда *C* догнал *B*, *A* отставал от них на 3 км, $LM = 3$.



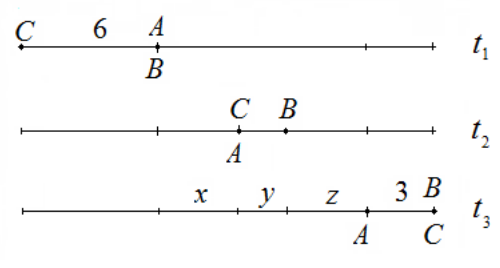
Так как треугольники *DKE* и *MKL* подобны по двум углам, то $KE : KL = 6 : 3 = 2 : 1$. Тогда $KL : LE = 1 : 3$. Треугольники *FLK* и *DLE* также подобны по двум углам, следовательно, $KL : LE = x : 6$, то есть $x : 6 = 1 : 3$, откуда $x = 2$.

Итак, искомое расстояние — 2 км.

Когда первый способ решения уже обсудили на уроке, ученик 9А класса Григорьев Д. привёл алгебраический способ решения, который показался мне более простым, чем упомянутый выше способ решения абитуриентов.

II способ. Изобразим взаимное расположение *A*, *B* и *C* в моменты встречи *A* и *B* (t_1), *A* и *C* (t_2) и *B* и *C* (t_3). Обозначим расстояние между местом встречи *B* и *A* и местом встречи *C* и *A* за *x*, искомое расстояние – за *y*, расстояние между положением *B* в момент встречи *C* и *A* и положением *A* в момент встречи *B* и *C* за *z* (все расстояния выражены в километрах).

Так как движение происходит с постоянными скоростями, то отношение расстояния, пройденного *C* к расстоянию, пройденному *A*, одинаково в любом промежутке времени. Тогда



верно равенство: $\dfrac{x+6}{x} = \dfrac{x+y+z+9}{x+y+z}$ (слева отношение расстояний, пройденных *C* и *A* с момента t_1 до момента t_2, справа – с момента встречи t_1 до момента t_3).

Преобразуем это равенство, вычитая по единице слева и справа: $\dfrac{6}{x} = \dfrac{9}{x+y+z}$, получим, что $x = 2y + 2z$.

Аналогично с отношениями расстояний, пройденных *B* и *A*, получим равенство: $\dfrac{x+y}{x} = \dfrac{x+y+z+3}{x+y+z}$, из которого с помощью аналогичных преобразований получим равенство $xy + y^2 + yz + 3y = 3x$.

Заменим в этом равенстве *x* на $2y + 2z$ и приведем полученное равенство к виду $(y - 2)(y + z) = 0$.

Так как пройденные расстояния больше нуля, то $y + z \neq 0$. Тогда $y = 2$.

Заметим, что приведённое решение можно немного упростить. Найдём отношение расстояний, пройденных A за промежутки времени $t_3 - t_2$ и $t_2 - t_1$, получим $\frac{y+z}{x}$. Аналогично для B и C получим отношения $\frac{z+3}{x+y}$ и $\frac{y+z+3}{x+6}$.

Так как для всех участников движения полученные отношения расстояний равны отношению $\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$, то верны равенства:

$$\frac{y+z+3}{x+6} = \frac{z+3}{x+y} = \frac{y+z}{x}.$$

Пользуясь свойством пропорции $\left(\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}\right)$, имеем:

$$\frac{3}{6} = \frac{3-y}{y} = \frac{y+z}{x}.$$

Из первой пропорции найдём искомое $y = 2$.

Ответ. На 2 км.

Теперь я уже не уверен, что геометрический метод решения данной задачи непременно лучше алгебраического.