УЧИМСЯ СТРОИТЬ СЕЧЕНИЯ

А.В. Шевкин,
Москва, avshevkin@mail.ru

Аннотация: *В статье рассмотрены два способа построения сечений куба — с помощью следа секущей плоскости и с помощью вспомогательных плоскостей (сечений), даны советы по решению задач, связанных с сечениями.*

Ключевые слова: *Построения сечений; секущая плоскость; след секущей плоскости; вспомогательное сечение.*

Одной из главных проблем, с которой сталкиваются десятиклассники в начале изучения курса стереометрии — это чтение двумерного чертежа, изображающего фигуру трёхмерного пространства. В последние годы эта проблема стала серьёзнее, так как из школьной программы исчез предмет «Черчение», который позволял приучать школьников к чтению пространственного чертежа. Попробуем компенсировать потери с помощью нескольких полезных советов.

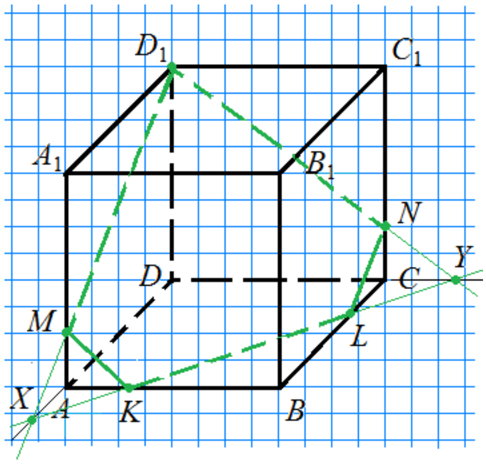

Рис. 4

В нашем изложении без определений используются понятие куба, который давно известен учащимся. В некоторых случаях будем опираться на интуитивно ясные факты, указывая, что они должны быть позднее доказаны, так как наша задача заключается в том, чтобы научиться строить сечения куба. А это полезно для развития умения видеть объёмное изображение на плоском чертеже и тренировки в использовании первых простых фактов стереометрии. Без таких задач и без раскрытия перспектив применения сечений начальный этап изучения геометрии может показаться скучным.

Строить сечения надо начинать как можно раньше, так как рассуждения о взаимном расположении прямых и плоскостей в таком случае будут опираться на имеющийся у учащихся опыт общения с пространственными фигурами.

Весь материал разбит на три блока — урока, но использовать его можно в той же последовательности на нескольких уроках. Звёздочкой выделены задачи «на вырост» — их назначение заключается в том, чтобы показать, какие задачи можно научиться решать, освоив построение сечений.

Урок 1. Сечения куба

1. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1). Пересекает ли прямая BB_1 прямую DC?

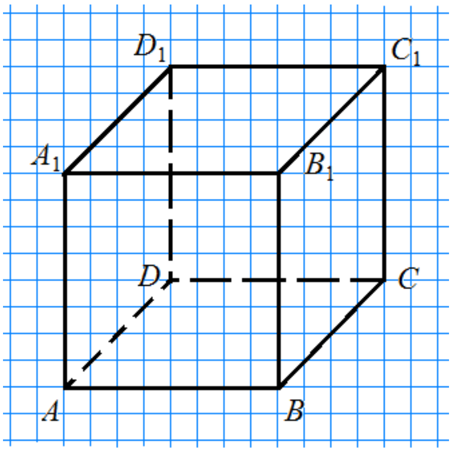

Рис. 1

Нет. Эти прямые лежат в *параллельных плоскостях*[1] ABB_1 и DCC_1, не имеющих общих точек, поэтому лежащие в них прямые не имеют общей точки. Параллельность противолежащих граней куба мы не доказали ссылками на аксиомы и их следствия, но чуть позже этот факт надо будет доказать с помощью *признака параллельности плоскостей*.

На поставленный вопрос учащиеся иногда отвечают так: «Эти прямые лежат в разных плоскостях».

СОВЕТ 1. Никогда не употребляйте эту фразу.

Дело в том, что даже одна прямая AB лежит в двух разных плоскостях: ABB_1 и ABC. (Найдите ещё одну такую плоскость. Сколько существует таких плоскостей?) А две прямые могут лежать в разных плоскостях и иметь общую точку. Например, прямые AB и BC лежат в разных плоскостях ABB_1 и BCC_1, но имеют общую точку B.

2. Назовите другие пары прямых, которые на рисунке 1 кажутся пересекающимися, но на самом не являются таковыми.

Если представить, что некоторая плоскость (называемая *секущей плоскостью*) отсекла от куба его часть, то на «срезе» куба мы увидим многоугольник — *сечение куба*.

Сечением куба называют многоугольник, стороны которого лежат на поверхности куба и в секущей плоскости.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его ребрах AA_1 и CC_1 отметили точки M и N соответственно так, что $AM : MA_1 = CN : NC_1 = 1 : 3$. Постройте сечение куба плоскостью MND_1.

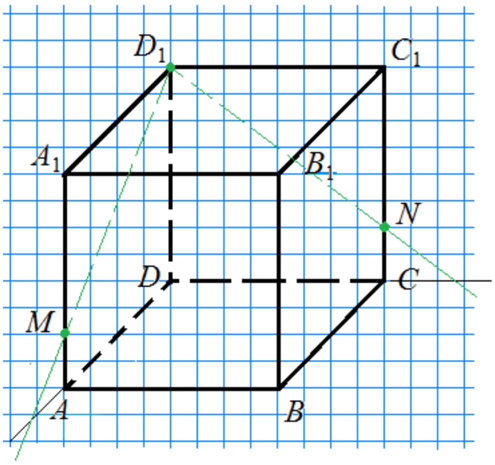

Рис. 2

СОВЕТ 2. Данные точки секущей плоскости и прямые, принадлежащие секущей плоскости, выделяйте цветом.

Следуя совету 2, выделим точки M, N и D_1 зелёным цветом (рис. 2[2]). Проведём прямые D_1M и D_1N — их тоже выделим зелёным цветом. Выделение цветом подчёркивает принадлежность точек, прямых, отрезков секущей плоскости.

СОВЕТ 3. Проводя прямую, думайте о том, в какой плоскости она лежит и не пересекает ли построенная прямая какую-либо прямую этой плоскости.

[1] Здесь и далее выделенный *курсивом* термин или факт может оказаться ещё не изученным на момент чтения статьи, надо обязательно найти его в учебнике, понять его смысл.

[2] Постройте в тетради рисунок 2, дополняйте его до получения сечения, следуя тексту.

Следуя совету 3, в плоскости ADD_1 найдём точку X — пересечение прямых D_1M и AD, а в плоскости CDD_1 — точку Y — пересечение прямых D_1N и DC. Точки X и Y тоже выделим зелёным цветом — они лежат в секущей плоскости.

Теперь в плоскости ABC проведём прямую XY, она пересечёт прямые AB и BC плоскости ABC в точках K и L соответственно. Прямую XY и полученные точки пересечения выделим зелёным цветом (рис. 4).

В плоскости ABB_1 соединим отрезком точки M и K, а в плоскости BCC_1 — точки N и L. Эти отрезки тоже выделим цветом. Отрезки MK, KL, LN, ND_1 и D_1M лежат на поверхности куба и в секущей плоскости. Они составляют границу многоугольника $MKLND_1$, являющегося сечением куба плоскостью MND_1. Сечение выделим жирной линией.

Прямую пересечения секущей плоскости с плоскостью основания куба называют *следом секущей плоскости*.

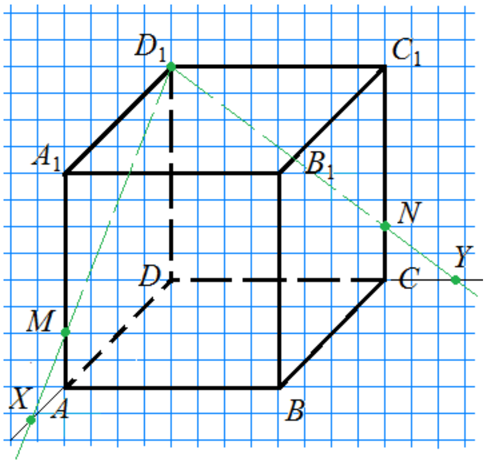

Рис. 3

4. Запишем построение сечения[3].

Построение.

1) D_1M; $D_1M \cap AD = X$;
2) D_1N; $D_1N \cap DC = Y$;
3) XY — след секущей плоскости MND_1;
$XY \cap AB = K$; $XY \cap BC = L$;
4) MK;
5) NL; $MKLND_1$ — искомое сечение.

Домашнее задание.

5. Почему $MKLND_1$ является многоугольником?

6. Докажите, что прямая D_1M принадлежит секущей плоскости.

7. Пусть в задаче **3** ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Вычислите длины отрезков AX, AK, CL, CY.

8. На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили точки M и N соответственно так, что $AM : MA_1 = CN : NC_1 = 1 : 3$. На ребре DD_1 отметили точку P так, что $DP : PD_1 = 3 : 1$. Постройте сечение куба плоскостью MNP.

9.* Вычислите площадь сечения, построенного в задаче **3**, если ребро куба равно a.

Указание. Вычислите площадь треугольника XD_1Y, потом площади двух подобных ему треугольников.

10.* *Задача «на вырост»*[4]. В каком отношении сечение делит объём куба в задаче **3**?

Указание. Посмотрите в учебнике *перпендикуляр к плоскости*, *признак перпендикуляра к плоскости*, *формулу объёма пирамиды*, подумайте, как можно вычислить объём части куба, заключённой под сечением куба.

---

[3] Под каждым новым номером в записи построения дан новый шаг построения и его результаты, если они есть.

[4] Похожие задачи раньше встречались на конкурсных экзаменах в вузы.

Разбор домашнего задания.

5. Из построения следует, что отрезки MK, KL, LN, ND_1 и D_1M лежат в секущей плоскости и образуют замкнутую ломаную, не имеющую самопересечений. $MKLND_1$ является многоугольником по определению.

6. Точки D_1 и M принадлежат секущей плоскости. Через них провели прямую D_1M, все точки которой принадлежат этой плоскости. Поэтому прямая D_1M принадлежит секущей плоскости. Это следует из аксиомы I планиметрии, в которой сказано: Через любые две точки можно провести прямую, и только одну. (Погорелов, 7-9 классы, с. 4).

7. Пусть $XA = x$. Из подобия треугольников XDD_1 и XAM (по двум углам) следует, что $\frac{x+a}{x} = \frac{a}{\frac{a}{4}}$, откуда $x = \frac{a}{3}$. Итак, $XA = \frac{a}{3}$, аналогично $CY = \frac{a}{3}$. Тогда $XD = YD$ и углы при основании равнобедренного прямоугольного треугольника XDY равны по 45^0. Но тогда треугольники XAK и LCY прямоугольные с острым углом 45^0, они равнобедренные, следовательно, $AX = AK = CL = CY = \frac{a}{3}$.

***8.* Построение.**

1) PM; $PM \cap AD = X$;

2) PN; $PN \cap DC = Y$;

3) XY — след секущей плоскости MNP; $XY \cap AB = K$; $XY \cap BC = L$;

4) MK;

5) NL; $MKLNP$ — искомое сечение.

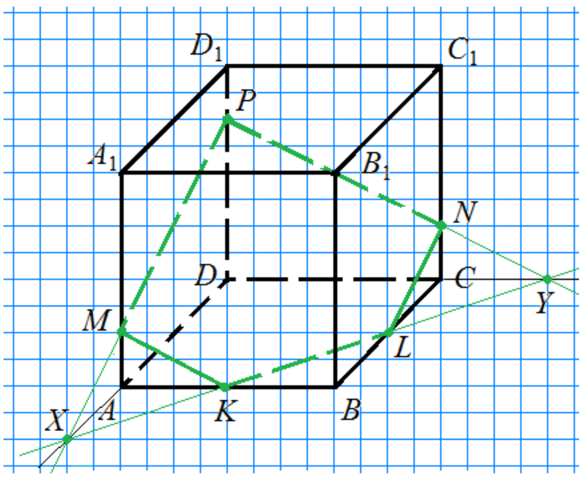

Рис. 5

***9.* Ответ.** $\frac{7a^2\sqrt{34}}{36}$.

***10.* Ответ.** 25: 11.

На рисунке 5 прямая PN пересекает плоскость ABC в точке Y. Такую прямую называют наклонной к плоскости, или коротко: *наклонной*. Из точки P проведён *перпендикуляр PD к плоскости ABC*. Точку D называют проекцией точки P на плоскость ABC. Аналогично точка C — проекция точки N на плоскость ABC. Заметим, что наклонная PN и её проекция DC пересекаются в точке Y, принадлежащей следу секущей плоскости.

11. Назовите пять пар наклонных и их проекций. Где лежит точка пересечения наклонной и её проекции на плоскость?

СОВЕТ 4. Помните: точка пересечения наклонной и её проекции на плоскость принадлежит следу секущей плоскости.

12. Докажите утверждение, содержащееся в совете 4.

13. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. На рёбрах AA_1 и BB_1 куба отметили точки M и N соответственно так, что $AM : MA_1 = 1 : 3$, $CN = NC_1$. На ребре DD_1

отметили точку P так, что $DP : PD_1 = 3 : 1$. Постройте сечение куба плоскостью MNP. Докажите, что след секущей плоскости проходит через точку B.

Построение.

1) PM;

$PM \cap AD = X$;

2) PN;

$PN \cap DC = Y$;

3) XY — след секущей плоскости MNP; $B \in XY$ (доказательство ниже);

4) MB;

5) BN;

$MBNP$ — искомое сечение.

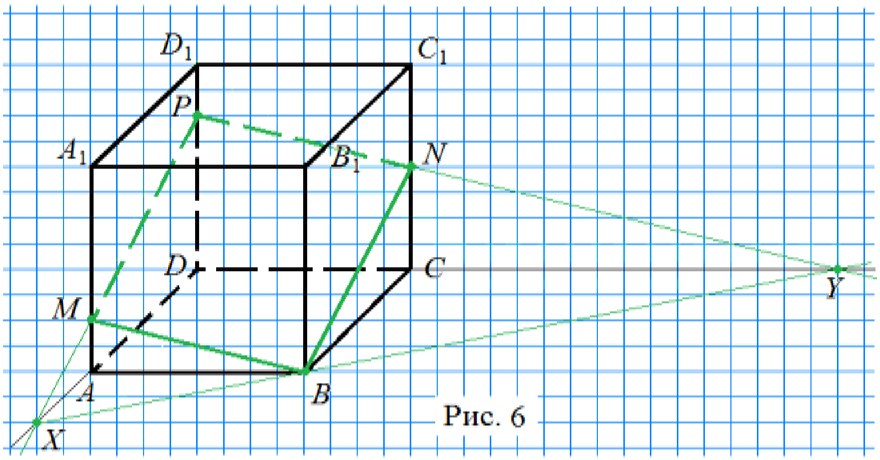

Рис. 6

Докажем, что $B \in XY$. $MA = \frac{a}{4}$, $PD = \frac{3a}{4}$, $NC = \frac{a}{2}$. Из подобия треугольников PDY и NCY (по двум углам) следует, что $CY = 2a$. Аналогично из подобия треугольников MAX и PDX следует, что $XA = \frac{a}{2}$.

Рассмотрим треугольники DXY и AXB. Так как $DY : AB = DX : AX = 3$, углы D и A этих треугольников равны, то треугольники DXY и AXB подобны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, углы DXY и AXB равны и $B \in XY$, что и требовалось доказать.

14. Изучите понятия *параллельные плоскости*, *признак параллельности двух плоскостей*. Найдите на рисунке 6 параллельные плоскости. Докажите, что если плоскость пересекает две параллельные плоскости, то линии пересечения параллельны.

15. Докажите, что сечение куба, полученное в задаче **13**, является параллелограммом.

Домашнее задание.

16.* Вычислите площадь сечения, построенного в задаче **13**.

17.* В каком отношении сечение делит объём куба в задаче **13**?

18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M и N — середины рёбер AA_1 и CC_1 соответственно. На ребре DD_1 отметили точку P так, что $DP : PD_1 = 3 : 1$. Постройте сечение куба плоскостью MNP. Определите вид многоугольника, являющегося сечением куба.

Урок 3. Сечения куба

Разбор домашнего задания.

16. По теореме Пифагора вычислим длины отрезков:

$$PX = \frac{3a\sqrt{5}}{4},\ PY = \frac{3a\sqrt{17}}{4},\ XY = \frac{3a\sqrt{5}}{4}.$$

Сначала найдём площадь треугольника, подобного нашему, у которого стороны: $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $2\sqrt{5}$. Коэффициент подобия $k = \frac{3a}{4}$. По формуле Герона она равна $\sqrt{21}$. Затем полученный результат умножим на квадрат коэффициента подобия k^2. Площадь треугольника XPY равна $\frac{9a^2\sqrt{21}}{16}$. Теперь найдём площади двух подобных ему треугольников XMB и BNY: $\frac{a^2\sqrt{21}}{16}$ и $\frac{4a^2\sqrt{21}}{16}$. Площадь сечения равна $\frac{(9-1-4)a^2\sqrt{21}}{16} = \frac{a^2\sqrt{21}}{4}$.

***17.* Ответ.** 5 : 3.

18. В отличие от предыдущих случаев, здесь след секущей плоскости не пересекает основания куба. Представим, что секущая плоскость пересекает ребро BB_1 в точке K. Тогда в плоскости BCC_1 наклонная NK должна пересекать свою проекцию BC на плоскость ABC в точке L, принадлежащей следу секущей плоскости. Значит, точку L можно найти как пересечение прямых BC и XY, а точку K — как пересечение прямых BB_1 и NL (закончите построение).

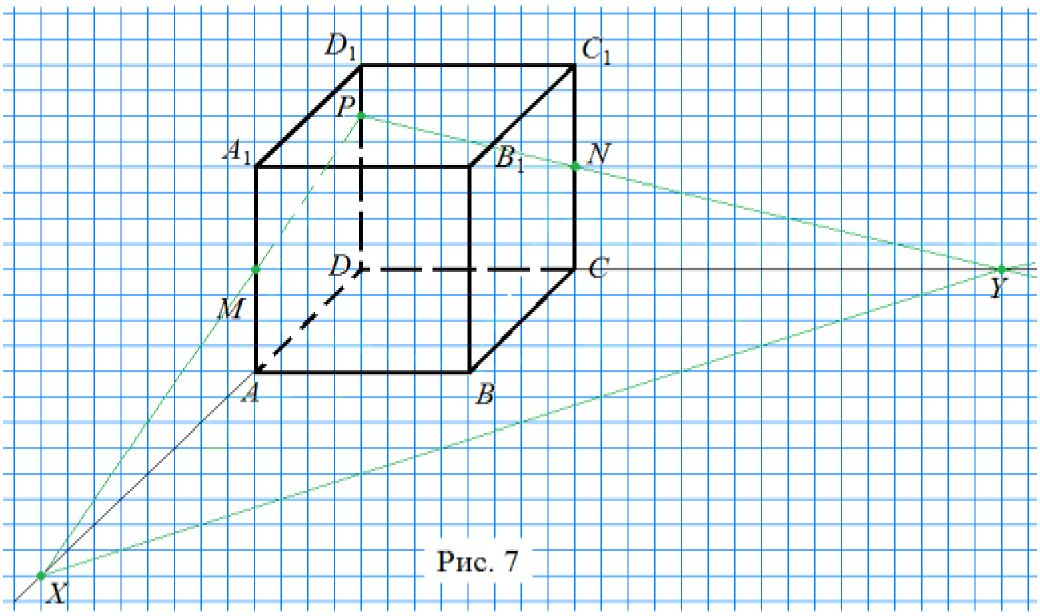

Рис. 7

В задаче **14** было доказано, что если плоскость пересекает две параллельные плоскости, то линии пересечения параллельны. Поэтому $MK \parallel PN$, $MP \parallel KN$, следовательно, сечение — параллелограмм.

19. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его рёбрах DD_1 и BB_1 отметили точки P и N соответственно так, что $DP : PD_1 = 3 : 1$, $BN : NB_1 = 1 : 3$. M — середина ребра AA_1. Постройте сечение куба плоскостью MNP.

Здесь можно построить точку X пересечения прямых MP и AD. Далее — точку Y пересечения прямых MN и AB. XY — след секущей плоскости (закончите построение).

Замечание. Через две параллельные прямые BB_1 и DD_1 можно построить плоскость DBB_1, дающую вспомогательное сечение куба DBB_1D_1. Проведём в этой плоскости прямую PN — это наклонная к плоскости ABC, она пересекает свою проекцию DB на плоскость ABC в точке Z, принадлежащей следу секущей плоскости. Следовательно, след секущей плоскости можно строить и с помощью вспомогательной плоскости.

20. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его ребре DD_1, на гранях ABB_1A_1 и BCC_1B_1 отметили точки K, M и N как показано на рисунке 8. Постройте сечение куба плоскостью MNK.

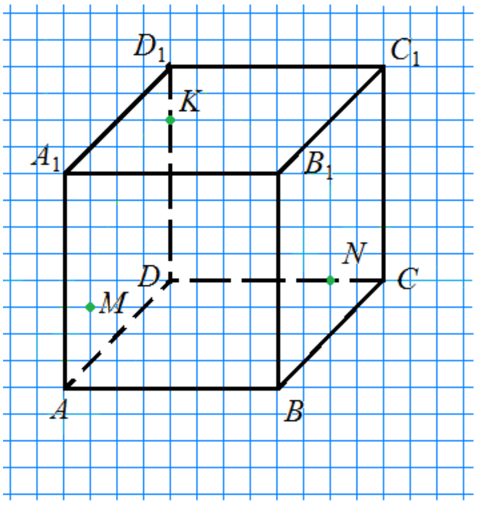

Рис. 8

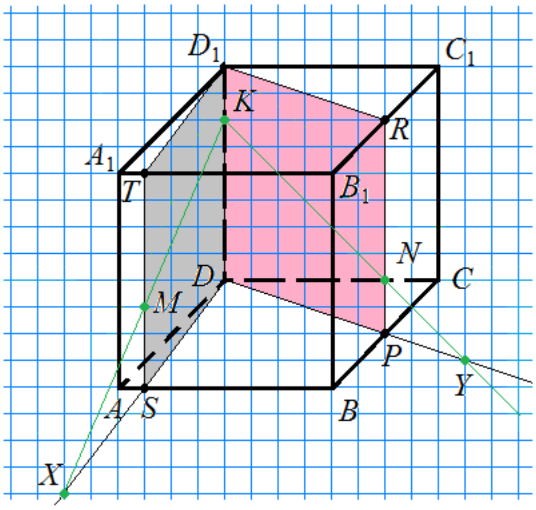

Рис. 9

В плоскости ABB_1 через точку M проведём прямую ST, параллельную ребру AA_1, а значит, и ребру DD_1 (рис. 9). Через параллельные прямые DD_1 и ST проведём плоскость, она пересечёт нижнее и верхнее основания куба по прямым DS и D_1T. Получим вспомогательное сечение куба SDD_1T. В плоскости этого сечения проведём прямые MK и DS. Они пересекаются в точке X — это первая точка следа секущей плоскости.

Аналогично в плоскости BCC_1 через точку N проведём прямую PR, параллельную ребру CC_1, а значит, и ребру DD_1 и построим вспомогательное сечение куба $DPRD_1$. На пересечении прямых DP и KN получим вторую точку следа секущей плоскости — Y (закончите решение).

Домашнее задание.

21. Можно ли выбрать на поверхности куба три точки так, что в сечении куба плоскостью, проходящей через эти точки, получится семиугольник? Объясните свой ответ.

22. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его рёбрах DD_1, DC и на грани ADD_1A_1 отметили точки K, N и M как показано на рисунке 8. Постройте сечение куба плоскостью MNK.

23. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его ребре DD_1, на гранях ADD_1A_1 и BCC_1B_1 отметили точки K, M и N как показано на рисунке 8. Постройте сечение куба плоскостью MNK.

24.* Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N и K являются серединами его рёбер AB, CC_1 и A_1D_1. Постройте сечение куба плоскостью MNK. Докажите, что это сечение является правильным шестиугольником.

Замечание. Кроме способа построения, аналогичного уже применявшимся, здесь можно воспользоваться советом:

СОВЕТ 5. Умный в гору не пойдёт, умный гору обойдёт.

Для этого надо построить замкнутую ломаную, соединив последовательно середины рёбер: AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 и A_1A. Потом доказать, что полученная ломаная лежит в плоскости MNK, проходит через заданные точки и является правильным шестиугольником.

Весьма интересный персонаж Е. Евстигнеева в фильме Э. Рязанова «Берегись автомобиля» сказал: «А не замахнуться ли нам на Вильяма, понимаете ли, нашего Шекспира?» Мы только начали заниматься сечениями, но возникает похожий вопрос: «А не замахнуться ли нам на задачу из подготовительного сборника к ЕГЭ?» На первых порах достаточно решить задание а), но если уже изучены теоретические сведения, необходимые для задания б), то эта задача нам уже по силам.

25.* В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AA_1 = 15$, $AB = 12$, $AD = 8$. Точка K — середина ребра C_1D_1, а точка L делит ребро BB_1 в отношении 4 : 1, считая от вершины B_1.

а) Найдите отношение, в котором плоскость LKA_1 делит ребро CC_1, считая от вершины C_1.

б) Найдите косинус *угла между плоскостями* LKA_1 и $A_1B_1C_1$.

Разбор домашнего задания.

21. Чтобы в сечении куба плоскостью получится семиугольник, стороны семиугольника должны принадлежать семи разным граням куба, а их всего 6. Следовательно, выбрать три такие точки невозможно.

24.* **Построение.**

1) P, R и S — середины отрезков C_1D_1, BC и AA_1 соответственно.

2) KP, PN, NR, RM, MS и SK; $KPNRMS$ — искомое сечение.

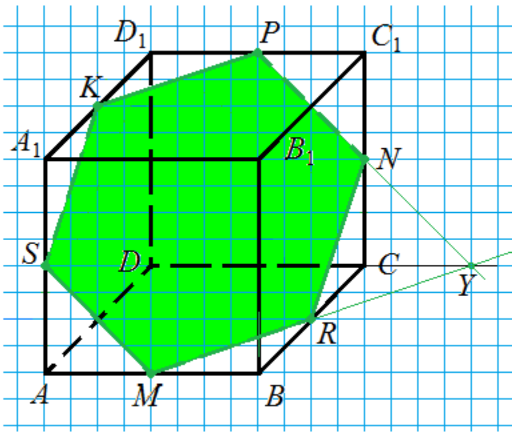

Рис. 10

Доказательство.

$KP \parallel A_1C_1$, $A_1C_1 \parallel AC$, $AC \parallel MR$, следовательно, $KP \parallel MR$ и точки K, P, M и R принадлежат одной плоскости, обозначим её α.

$MR \cap DC = Y$, $Y \in \alpha$.

Так как M и R середины отрезков AB и BC и $ABCD$ — квадрат, то $MB = BR = RC$, а $RC = CY$ (из равенства треугольников MBR и YCR по катету и прилежащему острому углу).

Пусть $PY \cap CC_1 = N_1$. Из равенства треугольников PC_1N_1 и YCN_1 по катету и противолежащему углу следует, что $C_1N_1 = CN_1$, то есть N_1 — середина отрезка CC_1. Следовательно, точки N_1 и N совпадают. Тогда N принадлежит плоскости α и плоскость α совпадает с плоскостью MNK.

Аналогично показывается, что $S \in MNK$. Тогда все вершины шестиугольника $KPNRMS$ лежат в плоскости MNK и $KPNRMS$ — искомое сечение, что и требовалось доказать.

Теперь докажем, что построенное сечение является правильным шестиугольником. Если $AB = a$, то по теореме Пифагора $KP = PN = NR = RM = MS = SK = NY = RY = 0{,}5a\sqrt{2}$, то есть стороны шестиугольника равны и треугольник NRY — равносторонний. Тогда внутренние углы шестиугольника R и N равны 120°, как смежные с углами равностороннего треугольника. Аналогично показывается, что все внутренние углы шестиугольника равны 120°, следовательно, этот шестиугольник правильный.

25.* **Построение.**

1) A_1K; $A_1K \cap B_1C_1 = M$;

2) ML;

$ML \cap C_1C = N$;

3) KN;

A_1KNL — искомое сечение.

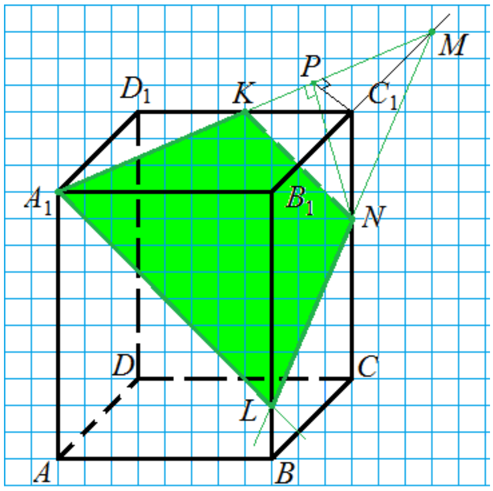

Рис. 11

а) Теперь вычислим отношение $C_1N : NC$.

Из условия задачи следует, что $KC_1 = 6$, $B_1L = 12$. Из подобия треугольников A_1B_1M и KC_1M следует, что $B_1M = 16$, тогда $C_1M = 8$ и C_1N — средняя линия треугольника B_1ML, поэтому $C_1N = 0{,}5B_1L = 6$, а $NC = 15 - 6 = 9$.

Итак, $C_1N : NC = 6 : 9 = 2 : 3$.

б) Теперь вычислим косинус угла между плоскостями LKA_1 и $A_1B_1C_1$. Для этого найдём по теореме Пифагора $KM^2 = C_1M^2 + C_1K^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, $KM = 10$. Треугольники KC_1M и NC_1M равны по двум катетам, следовательно, $NM = KM = 10$. Из вычисления площади треугольника KC_1M двумя способами получим $C_1P = 4{,}8$. В треугольнике KMN $KM = MN = 10$, $KN = 6\sqrt{2}$, а высота, проведённая к основанию, равна $\sqrt{82}$. Из вычисления площади треугольника KMN двумя способами получим $NP = 1{,}2\sqrt{41}$.

Учитывая, что C_1N является перпендикуляром к плоскости $A_1B_1C_1$, по теореме о трёх перпендикулярах прямая PN перпендикулярна прямая KM, тогда угол C_1PN является углом между плоскостями LKA_1 и $A_1B_1C_1$. Его косинус равен $\frac{C_1P}{PN} = \frac{4{,}8}{1{,}2\sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$.

Замечание 1. Если к моменту решения задачи изучено вычисление площади проекции фигуры, то, учитывая, что треугольник KC_1M является проекцией треугольника PC_1N, верно равенство $S_{KC_1M} = S_{KNM} \cdot \cos C_1PN$. Откуда можно получить $\cos C_1PN$, вычислив предварительно площади треугольников KC_1M и KNM.

Замечание 2. Решение экзаменационной задачи записано достаточно подробно с учебной целью, но и в нём некоторые очевидные вычисления пропущены и записаны их результаты. На экзамене запись решения может быть короче.