Расстояние между скрещивающимися прямыми

А.В. Шевкин,
avshevkin@mail.ru

Начнём с определений.

Определение 1. Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называют отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Определение 2. Расстоянием между скрещивающимися прямыми называют длину их общего перпендикуляра.

Можно доказать следующие утверждения.

Утверждение 1. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых существует и единственный.

Утверждение 2. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые ([1], с. 31-32).

Приведённых сведений достаточно, чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми в простых случаях. В данной статье расстояние между фигурами F_1 и F_2 обозначается $\rho\ (F_1, F_2)$.

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. M — произвольная точка отрезка BC (рис. 1). Найдите $\rho\ (AM, A_1D_1)$.

Отрезок AA_1 — общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых AM и A_1D_1, так как AA_1 — перпендикуляр к каждой из плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$. Его длина 1 и есть расстояние между скрещивающимися прямыми AM и A_1D_1 (*по определению 2*). Итак, $\rho\ (AM, A_1D_1) = 1$.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. M — произвольная точка отрезка BC (рис. 2). Найдите $\rho\ (AM, C_1D_1)$.

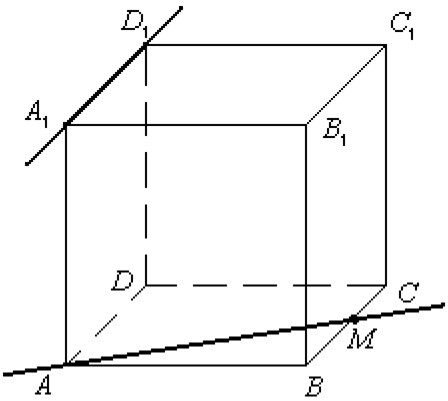

Рис. 1

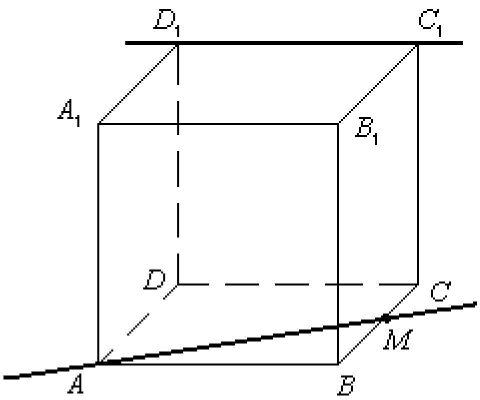

Рис. 2

Можно, конечно, построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых AM и C_1D_1 и убедиться, что его длина равна 1. Но можно ничего не строить, так как $\rho\ (AM, C_1D_1) = \rho\ (ABC, A_1B_1C_1)$ (по *утверждению 2*).

А $\rho\ (ABC, A_1B_1C_1)$ есть длина ребра куба, она равна 1.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите $\rho\ (BD_1, CC_1)$ (рис. 3).

Прямая CC_1 параллельна плоскости BDD_1, в которой лежит прямая BD_1. Поэтому искомое расстояние равно расстоянию между прямой CC_1 и плоскостью BDD_1. Это расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат прямые BD_1 и CC_1, его можно найти, вычислив расстояние от точки C до прямой BD. Оно равно половине длины диагонали квадрата $ABCD$. Итак, $\rho\ (BD_1, CC_1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Докажите, что общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых BD_1 и CC_1 есть отрезок, соединяющий середины отрезков BD_1 и CC_1.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите $\rho\ (AC, BD_1)$.

Так как прямая AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым BD и BB_1, то прямая AC перпендикулярна плоскости BDD_1 (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Из точки пересечения диагоналей основания O проведём перпендикуляр OK к отрезку BD_1. Отрезок OK и есть общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых AC и BD_1 (рис. 4). Его длину найдём из подобия прямоугольных треугольников BKO и BDD_1 с общим острым углом: $\frac{OK}{DD_1} = \frac{OB}{BD_1}$, $\frac{OK}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{3}$, $OK = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

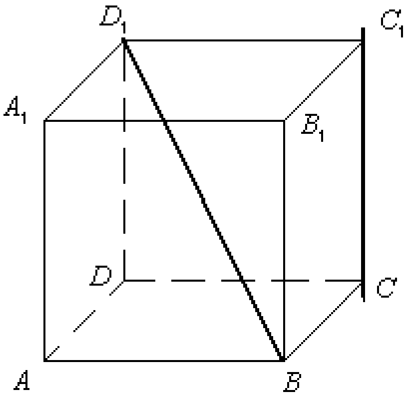

Рис. 3

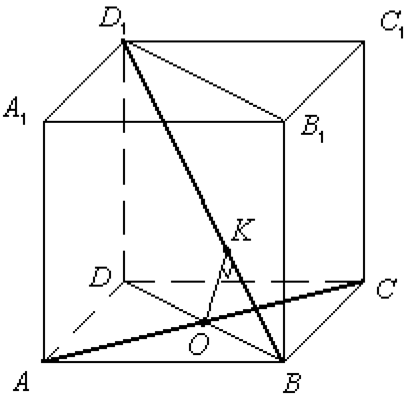

Рис. 4

Тот же результат можно получить, используя утверждение 3, которое мы докажем.

Утверждение 3. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из них ([2], с. 96).

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые и плоскость α перпендикулярна прямой a. Прямая b пересекает плоскость α в точке C (рис. 5). Пусть отрезок AB — общий перпендикуляр прямых a и b (он существует по *утверждению 1*). Проекцией отрезка AB на плоскость α является отрезок A_1B_1, перпендикулярный отрезкам AA_1 и BB_1. Так как отрезок AB перпендикулярен наклонной CB, то он перпендикулярен и её проекции CB_1 (по теореме о трёх перпендикулярах). То есть длина отрезка A_1B_1 есть расстояние от точки A_1 (проекции прямой a на плоскость α) до прямой CB_1 (проекции прямой b на плоскость α).

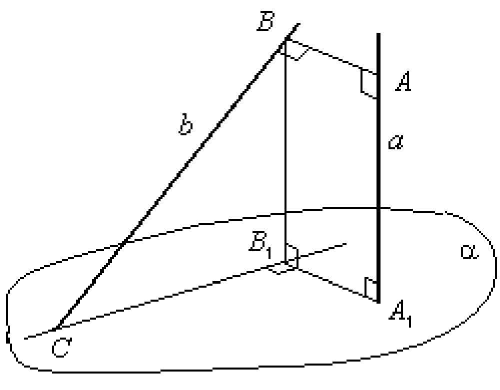

Рис. 5

Противоположные стороны AB и A_1B_1 прямоугольника ABB_1A_1 равны, поэтому расстояние AB между скрещивающимися прямыми равно расстоянию A_1B_1 между их проекциями на плоскость α, перпендикулярную прямой a, что и требовалось доказать.

Решим задачу **5** с помощью утверждения 3.

Проекцией прямой AC на плоскость BDD_1 является точка O пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, а проекцией прямой BD_1 на плоскость BDD_1 является сама эта прямая (рис. 4), поэтому $\rho\ (AC, BD_1) = \rho\ (O, BD_1) = OK$

(по *утверждению 3*). Далее, как показано выше, из подобия прямоугольных треугольников BKO и BDD_1 найдём длину отрезка OK.

6. Дана правильная пирамида $PABC$ с боковым ребром $PA = 3$ и стороной основания 2. Найдите $\rho\ (AB, PC)$.

Так как пирамида правильная, то проекцией вершины P пирамиды на плоскость ABC является центр основания O — точка пересечения медиан AN и CM правильного треугольника ABC, $PO \perp ABC$ (рис. 6). Так как $CM \perp AB$ и $PM \perp AB$ (по свойству медианы равнобедренного треугольника, проведённой к его основанию), то плоскость MPC перпендикулярна прямой AB и проекцией этой прямой на плоскость MPC является точка M, а проекцией прямой PC на плоскость MPC является сама эта прямая.

Тогда $\rho\ (AB, PC) = \rho\ (M, PC)$ (по *утверждению3*) .

Теперь вычислим по теореме Пифагора: $MC = \sqrt{3}$ (из треугольника MBC), $MO = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $PM = 2\sqrt{2}$ (из треугольника APM), $PO = \dfrac{\sqrt{69}}{3}$ (из треугольника POM).

В треугольнике MPC проведём высоту MK. Вычислив двумя способами площадь треугольника MPC, получим равенство $\dfrac{MK \cdot 3}{2} = \dfrac{\sqrt{69}\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2}$, откуда $MK = \dfrac{\sqrt{23}}{3}$.

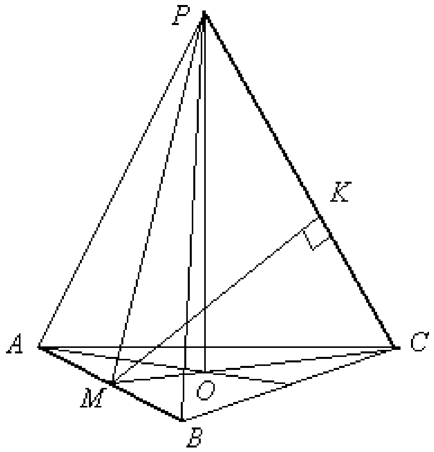

Рис. 6

Итак, если требуется найти расстояние между скрещивающимися прямыми, то постройте их общий перпендикуляр и найдите его длину; или найдите параллельные плоскости, в которых лежат данные прямые, и найдите расстояние между этими плоскостями; или спроектируйте эти прямые на плоскость, перпендикулярную одной из них, и найдите расстояние между их проекциями.

Задачи для самостоятельного решения

7. Сторона основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равна 2. Высота призмы равна 1. Найдите расстояние между прямыми: а) AB и A_1D_1; б) BF и B_1E.

8. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ боковое ребро PA равно 2, а сторона основания AB равна 1. Найдите расстояние между прямыми AP и BC.

9. В правильной шестиугольной пирамиде $PABCDEF$ боковое ребро PA равно 2, а сторона основания AB равна 1. Найдите расстояние между прямыми: а) AB и PC; б) AB и PD.

Ответы. 7. а) 1; б) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **8.** $\sqrt{\dfrac{14}{15}}$. **9.** а) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$.

Выражаю благодарность А. Дьячкову за полезные советы по улучшению текста статьи.

Список литературы

[1] Геометрия : Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. – 4-е изд., дораб. – М.: Просвещение, АО «Московские учебники», 2003. – 128 с.

[2] Геометрия : Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. – 5-е изд. – М.: Дрофа, 2004. – 206 с.