

Не бойтесь вводить лишние буквы, решая сложные задачи на проценты

А.В. Шевкин,
Москва, avshevkin@mail.ru

Будем считать, что учащиеся уже обучены решать задачу «Найти число b , составляющее p % числа a » и две обратные задачи, приводящие к нахождению a и p из равенства $b = \frac{a \cdot p}{100}$.

Рассмотрим способы решения более сложных задач на проценты, требующих сравнения чисел в процентах — такие задачи предлагались в прошлые годы на ЕГЭ.

Заметим, что при решении задач на проценты лучше обходиться без пропорций, в чём можно убедиться, решив рассмотренные ниже задачи с помощью пропорций.

1. Число увеличили на 10 %, полученное число ещё раз увеличили на 10 %. На сколько процентов увеличилось первоначальное число за два раза?

Решение. Пусть a — первоначальное число, тогда

$$a + \frac{10}{100} \cdot a = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot a = 1,1a \text{ — второе число,}$$

$$1,1a + \frac{10}{100} \cdot 1,1a = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot 1,1a = 1,1^2 a = 1,21a = a + 0,21a \text{ — третье число, оно}$$

на 21 % больше, чем a .

Ответ. На 21 %.

Здесь и далее неизвестное число, от которого находят проценты будем обозначать буквой.

Обобщим полученный результат: чтобы увеличить число на p %, можно это число умножить на $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Аналогично показывается, что для уменьшения числа на p %, можно это число умножить на $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

2. Зарплату сотрудника увеличили на несколько процентов. Через некоторое время эту новую зарплату увеличили на столько же процентов, как и в первый раз. На сколько процентов увеличили зарплату в первый раз, если за два раза она увеличилась на 44 %?

Решение. Пусть a — первоначальная зарплата и её увеличили в первый раз на p %, тогда после первого повышения зарплата стала равной $\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot a$. Эту зарплату увеличили на p %, поэтому третья

зарплата была равна $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot a$, она по условию задачи равна $1,44a$.

Тогда верно равенство:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot a = 1,44a,$$

которое перепишем в виде:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1,44.$$

Так как $1 + \frac{p}{100} > 0$, то $1 + \frac{p}{100} = 1,2$, откуда $p = 20$.

Следовательно, в первый раз зарплату увеличили на 20 %.

Ответ. На 20 %.

Перейдём теперь к решению задач, в которых надо определить, на сколько процентов одно число больше (меньше) другого.

3. На сколько процентов число 50 больше, чем число 40?

Решение. 50 от 40 составляет $\frac{50 \cdot 100\%}{40} = 125\%$.

Это на $125\% - 100\% = 25\%$ больше, чем число 40.

Ответ. На 25 %.

Тот же результат получим, объединив два действия:

$$125\% - 100\% = \frac{50 \cdot 100\%}{40} - 100\% = \frac{(50 - 40) \cdot 100\%}{40}.$$

Обобщим полученный результат:

число a больше, чем число b на $\frac{(a-b) \cdot 100\%}{b}$.
--

Здесь и далее надо обращать внимание учащихся на то число, с которым сравнивают в процентах другое число. Это число будет всегда оказываться в знаменателе дроби в тех формулах, которые мы составим для решения задач на сравнение двух чисел в процентах.

4. На сколько процентов число 40 меньше, чем число 50?

Решение. 40 от 50 составляет $\frac{40 \cdot 100\%}{50} = 80\%$.

Это на $100\% - 80\% = 20\%$ меньше, чем число 50.

Ответ. На 20 %.

Тот же результат получим, объединив два действия:

$$100\% - 80\% = 100\% - \frac{40 \cdot 100\%}{50} = \frac{(50 - 40) \cdot 100\%}{50}.$$

Обобщим полученный результат:

число b меньше, чем число a на $\frac{(a-b) \cdot 100\%}{a}$.
--

Таким образом, чтобы найти, на сколько процентов одно число больше (меньше) другого, можно их разность (большее минус меньшее) разделить на то число, с которым сравниваем, и результат умножить на 100.

5. У Вовы «пятёрок» на 60 % меньше, чем «троек». На сколько процентов у Вовы «троек» больше, чем «пятёрок»?

Решение. Пусть у Вовы было p «пятёрок» и t «троек». По условию задачи $p = \left(1 - \frac{60}{100}\right) \cdot t = 0,4t$.

У Вовы «троек» больше, чем «пятёрок», на

$$\frac{(t-p) \cdot 100 \%}{p} = \frac{(t-0,4t) \cdot 100 \%}{0,4t} = \frac{0,6t \cdot 100 \%}{0,4t} = 150 \%$$

Ответ. На 150 %.

Задачи 3 – 5 включены в Рабочую тетрадь для 7 класса, которую мы сейчас пишем с М. К. Потаповым.

6. У Лены «пятёрок» на 25 % больше, чем «троек». На сколько процентов у Лены «троек» меньше, чем «пятёрок»?

Решение. Пусть у Лены было p «пятёрок» и t «троек». По условию задачи $p = \left(1 + \frac{25}{100}\right) \cdot t = 1,25t$.

У Лены «троек» меньше, чем «пятёрок», на

$$\frac{(p-t) \cdot 100 \%}{p} = \frac{(1,25t-t) \cdot 100 \%}{1,25t} = \frac{0,25t \cdot 100 \%}{1,25t} = 20 \%$$

Ответ. На 20 %.

7. Второе число на 50 % больше первого и на 50 % меньше третьего. На сколько процентов третье число больше, чем первое?

Решение. Пусть p — первое число, t — третье число. По условию задачи второе число равно $\left(1 + \frac{50}{100}\right) \cdot p = 1,5p$, или $\left(1 - \frac{50}{100}\right) \cdot t = 0,5t$. Так как это одно и то же число, то $1,5p = 0,5t$, откуда следует, что $t = 3p$.

Третье число больше, чем первое на

$$\frac{(t-p) \cdot 100 \%}{p} = \frac{(3p-p) \cdot 100 \%}{p} = 200 \%$$

Ответ. На 200 %.

Задачи для самостоятельного решения

8. На сколько процентов 21 меньше, чем 24?

9. В понедельник цена акции увеличилась на 20 %, во вторник она увеличилась ещё на 30 %. На сколько процентов за эти два дня увеличилась цена акции?

10. Во вторник цена акции увеличилась на 30 %, в среду она уменьшилась на 30 %. Как изменилась цена акции за эти два дня и на сколько процентов?

11. У Васи «пятёрок» на 75 % меньше, чем у Коли. На сколько процентов у Коли «пятёрок» больше, чем у Васи?

12. На помидоры мама потратила денег на 25 % меньше, чем на огурцы, и на 200 % больше, чем на картофель. На сколько процентов меньше она потратила денег на картофель, чем на огурцы?

13. За некоторое время доллар подорожал (в рублях) на 25 %. На сколько процентов за это время подешевел рубль (в долларах)?

14. За некоторое время евро подешевел (в рублях) на 20 %. На сколько процентов за это время подорожал рубль (в евро)?

15. ЕГЭ, 2008. Брюки дороже рубашки на 20 % и дешевле пиджака на 46 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

16. ЕГЭ, 2008. Брюки дороже рубашки на 25 % и дешевле пиджака на 20 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

17. ЕГЭ, 2009. В магазине костюм, состоящий из пиджака и брюк, стоит на 20 % дороже, чем такой же костюм на рынке, причем брюки стоят на 30 % дороже, чем на рынке, а пиджак — на 15 %. Во сколько раз на рынке брюки от этого костюма дешевле пиджака?

Ответы. **8.** На 12,5 %. **9.** На 56 %. **10.** Уменьшилась на 9 %. **11.** На 300 %. **12.** На 75 %. **13.** На 20 %. **14.** На 25 %. **15.** На 55 %. **16.** На 36 %. **17.** В 2 раза.