2. «Пятёрочки» задач как средство подготовки школьников к олимпиадам

Идею использования «пятёрочек» задач для подготовки учащихся к олимпиадам описал в газете «Математика» в середине 90-х годов прошлого века П.В. Чулков, не только описал, но и реализовал её на практике. Она и теперь успешно используется в нашей школе, имеющей реальные успехи в олимпиадном движении. Идея предельно проста. Если вы хотите, чтобы ваши учащиеся были успешными в олимпиадах и других конкурсах, то давайте им такие задачи один раз в неделю, отмечайте успех каждого ученика в их решении, разбирайте решения этих задач с классом — регулярная целенаправленная работа обязательно принесёт свои плоды. На еженедельных «пятёрочках» задач в нашей школе построена работа практикума по решению задач, но эта заметка о другом способе реализации той же идеи.

В двух своих группах (5А и 5Б) один раз в неделю я даю «пятерочку» задач после уроков. Полное решение каждой задачи оцениваю в 5 баллов (неполное — в часть этих баллов). Каждые набранные учеником 20 баллов дают ему «5» в журнал. Причём неиспользованные баллы из разных «пятёрочек» суммируются. Правила выставления отметки могут варьироваться[1] — суть не в этом. Главное здесь заключается в том, что я стараюсь подобрать известные или составить новые задачи, которые, по моему мнению, полезно решить моим учащимся, чтобы они освоили определённый тип задач, приём рассуждения и т.п. При этом можно подбирать разнообразные и интересные задачи, а также цепочки нарастающих по сложности задач на одну и ту же идею.

Если владение приёмом решения задачи надо проверить у каждого учащегося, то выношу «пятёрочку на самостоятельную работу на уроке.

К концу учебного года накопилось больше двадцати «пятёрочек»[2], удалось составить три тематические «пятёрочки» задач. С ними работали иначе. Первые задачи каждой «пятёрочки» разбирали общими усилиями на уроке, чтобы освоить необычную идею — чётные и нечётные факториалы, или приём «рассмотрим крайний случай» (задачи про домино), или научиться применять «лишние» буквы (задачи на совместную работу). Две первые темы вполне по силам сильным пятиклассникам, причём задачи про факториалы дают учащимся опыт построения математической теории: здесь есть определения новых объектов и доказательства их свойств, а третья — «на вырост», её можно было дать позже.

Разумеется, приведённые ниже задачи можно использовать и вне работы с «пятёрочками» задач, и в классах постарше.

Далее приведены задачи с решениями по трём упомянутым темам. Кроме заготовленных заранее способов решения задач, приведены и решения, предложенные учащимися. Они не укладываются в «прокрустово ложе» учительской задумки, но интересны своей самостоятельностью.

Задачи про чётные и нечётные факториалы

Назовём **чётным факториалом** натурального числа n ($n > 3$) произведение всех чётных чисел, не превосходящих n (обозначим его $n!!$), а **нечётным факториалом** натурального числа n ($n > 2$) произведение всех нечётных чисел, не превосходящих n (обозначим его $n!!!$).

Например, $6!! = 2\cdot 4\cdot 6$, $6!!! = 1\cdot 3\cdot 5$, $7!! = 2\cdot 4\cdot 6$, $7!!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7$.

1. Докажите, что: а) $n!! \cdot n!!! = n!$; б) если n — чётное число, то $n!! > n!!!$; в) если n — нечётное число, то $n!! < n!!!$.

Доказательство. а) $n!!$ — это произведение всех чётных чисел, не превосходящих

---

[1] С появлением в 6 классе электронного журнала появилась возможность ставить отметки с учетом их «веса». За решение четырёх задач из «пятёрочки» ставлю «5» с весом 4 — как за контрольную работу (то есть четыре простые «5»). С уменьшением числа верных решений на 1 уменьшаю «вес» отметки на 1 (отметок ниже «5» за решение дополнительных задач не ставлю).

[2] http://www.shevkin.ru/?action=Page&ID=384

n, а $n!!!$ — это произведение всех нечётных чисел, не превосходящих n. В этих произведениях множители не повторяются, поэтому $n!! \cdot n!!!$ — это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n, т. е. это $n!$, что и требовалось доказать.

б) Так как n — число чётное, то верны равенства

$$n!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot n,$$
$$n!!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (n-1).$$

В этих произведениях равное число множителей и каждый множитель первого произведения больше соответствующего множителя второго произведения, поэтому $n!! > n!!!$, что и требовалось доказать.

в) Так как n — число нечётное, то верны равенства

$$n!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (n-1),$$
$$n!!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot n.$$

Во втором произведении на один множитель больше, но если в нём убрать множитель 1, то в двух произведениях

$$n!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (n-1),$$
$$n!!! = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot n$$

окажется равное число множителей, каждый множитель первого произведения меньше соответствующего множителя второго произведения, поэтому $n!! < n!!!$, что и требовалось доказать.

Замечание. Утверждение «если два произведения содержат равное число множителей и каждый множитель первого произведения больше соответствующего множителя второго произведения, то первое произведение больше второго» кажется очевидным, но в старших классах его надо доказывать.

2. Докажите, что: а) если $n!! > n!!!$, то n — чётное число; б) если $n!! < n!!!$, то n — нечётное число.

Доказательство а) Предположим, что число n — нечётное число, тогда из доказанного выше (задание **1,в**) следует, что верно неравенство $n!! < n!!!$, а это противоречит условию, следовательно, n — число чётное, что и т. д.

3. а) Сколько лет Васе, если чётный факториал его возраста больше нечётного факториала его возраста в $\frac{1024}{231}$ раза?

б) Сколько лет Даше, если нечётный факториал её возраста больше чётного факториала её возраста в $\frac{3003}{1024}$ раза?

Решение. а) Пусть Васе исполнилось n лет, тогда $\frac{1024}{231} = \frac{n!!}{n!!!}$. Так как $\frac{1024}{231} > 1$, то $n!! > n!!!$, тогда n — чётное число (задание **2,а**). Так как число $n!!!$ не содержит чётных множителей, то дробь $\frac{n!!}{n!!!}$ не сокращалась на 2 и все множители 2 из разложения числа $n!!$ на простые множители содержатся в разложении на простые множители числа $1024 = 2^{10}$. Выпишем последовательные чётные числа, содержащие (вместе) 10 множителей 2:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12.$$

Последнее из них 12, следовательно, $n = 12$, то есть Васе 12 лет.

Ответ. а) 12 лет; б) 13 лет.

4. а) Определите последнюю цифру в записи числа 2007!!!.

б) Определите, на сколько нулей оканчивается запись числа 100!!.

Решение. а) Записи всех множителей в произведении $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2007$ оканчиваются нечётными цифрами, среди них есть 5, поэтому запись числа 2007!!! оканчивается цифрой 5.

б) В произведении 100!! множителей 2 больше, чем множителей 5, поэтому число нулей в конце записи числа 100!! равно числу множителей 5 в произведении чётных чисел, кратных 5:

$$10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 70 \cdot \cdot 80 \cdot 90 \cdot 100.$$

Это произведение содержит 12 множителей 5, поэтому запись числа 100!! оканчивается на 12 нулей.

Ответ. а) 5; б) на 12 нулей.

5. Определите последнюю отличную от нуля цифру в записи числа 30!!.

Решение. Будем определять последнюю отличную от нуля цифру, последовательно умножая множители в произведении $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 30$. В первой строке запишем все множители числа 30!!, во второй — последнюю отличную от нуля цифру, полученную после умножения на множитель, стоящий над этой цифрой. $2 \cdot 4 = 8$, $2 \cdot 4 \cdot 6$ оканчивается на 8, $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ оканчивается на 4 и т. д.:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 28 \cdot 30.$$

8 8 4 4 8 2 2 6 2 4 6 6 8 4

Итак, 4 — последняя отличная от нуля цифра в записи числа 30!!.

Ответ. 4.

Задачи про домино

1. Вася разложил домино в 4 ряда по 7 костей в каждом. Оказалось, что суммы очков в этих рядах относятся как 2:3:4:5. Какова сумма очков в каждом ряду?

Решение. В четырёх рядах $8\cdot(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 168$ очков. Пусть в первом, втором, третьем и четвёртом рядах суммы очков составляют 2, 3, 4 и 5 частей соответственно. Тогда на 14 частей приходится 168 очков, поэтому сумма очков в первом ряду равна $168:14\cdot2 = 24$. Во втором 36, в третьем 48, а в четвёртом 60.

Ответ. 24, 36, 48, 60 очков.

2. Вася хочет разложить домино в 4 ряда по 7 костей в каждом так, чтобы суммы очков в этих рядах относились как 1:2:3:4. Но ему это пока не удалось. Сможет ли Вася выполнить своё желание?

Решение. В четырёх рядах 168 очков (задача **1**). Пусть в первом, втором, третьем и четвёртом рядах суммы очков составляют 1, 2, 3 и 4 части соответственно. Тогда на 10 частей приходится 168 очков, поэтому в первом ряду должно быть 168:10 — дробное число очков, что невозможно. Следовательно, Вася не сможет выполнить своё желание.

Ответ. Нет.

3. Однажды А, Б, В и Г играли в домино и взяли по 7 костей каждый. Оказалось, что сумма очков у А на 54 больше, чем у Б, а у В и Г очков было поровну. Какова сумма очков у Г?

Решение. *I способ.* У четырёх игроков 168 очков. Рассмотрим «крайний» случай, когда у А наибольшая возможная сумма очков, а у Б наименьшая. В этом случае у А было $12 + 11 + 10 + 10 + 9 + 9 + 8 = 69$ очков, у Б — $0 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 15$ очков (рис. 15), т. е. у А как раз на 54 очка больше, чем у Б.

Рис. 15

Если бы у А было хоть на одно очко меньше и/или у Б хоть на одно очко больше, то разность их сумм очков была бы меньше 54, что противоречило бы условию задачи. Следовательно, у А и Б было 69 и 15 очков соответственно, а всего 84 очка. Оставшиеся $168 - 84 = 84$ очка разделим поровну между В и Г, получим по 42 очка.

Итак, у Г было 42 очка.

II способ (Кулямин А., 5Б). Если бы у четырёх игроков очков было поровну, то у них было бы по 168:4 = 42 очка. Чтобы у А и Б образовалась требуемая разность 54 очка, надо половину этой разности (27 очков) вычесть из суммы очков Б и прибавить к сумме очков А: 42 – 27 = 15, 42 + 27 = 69. Все условия задачи выполнены, у Г было 42 очка.

Нетрудно убедиться, что суммы очков 69, 15, 42 и 42 можно получить, используя набор костей домино.

Ответ. 42 очка.

4. Однажды А, Б, В и Г играли в домино и взяли по 7 костей каждый. Оказалось, что у А сумма очков на 53 больше, чем у Б, а у В на 13 очков больше, чем у Г. Какова сумма очков у Г?

Решение. У четырёх игроков 168 очков. Если бы у А была наибольшая возможная сумма очков, а у Б наименьшая, то у А было бы 69 очков, у Б — 15 очков (задача **3**). В этом случае сумма очков у А была бы на 54 очка больше, чем у Б. Разность 53 очка могла получиться только в двух случаях: 69 – 16 и 68 – 15. Рассмотрим эти случаи.

1) У А 69 очков, у Б 16 очков, у А и Б вместе 85 очков, у В и Г вместе 83 очка. Так как у В на 13 очков больше, чем у Г, то у Г было (83 – 13):2 = 35 очков.

2) У А 68 очков, у Б 15 очков, у А и Б вместе 83 очка, у В и Г вместе 85 очков. Так как у В на 13 очков больше, чем у Г, то у Г было (85 – 13):2 = 36 очков.

Нетрудно убедиться, что оба случая реализуются с помощью костей домино, поэтому задача имеет два решения.

Ответ. 35 или 36 очков.

5. Однажды А, Б, В и Г играли в домино и взяли по 7 костей каждый. У А оказались все дубли: (0, 0), (1, 1), ... , (6, 6), у Б на 40 очков больше, чем у В. Сколько очков было у Г?

Решение. У А было 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42 очка из 168 очков. Если бы у Б была наибольшая возможная сумма очков, а у В наименьшая (из оставшихся костей без дублей), то у Б было бы 11 + 10 + 9 + 9 + 8 + 8 + 7 = 62 очка, у В — 1 + 2 + 3 + 3 + + 4 + 4 + 5 = 22 очка. В этом случае у Б было бы как раз на 40 очков больше, чем у В. Если бы у Б было бы хоть на 1 очко меньше и/или у В хоть на одно очко больше, то разность их сумм очков была бы меньше 40. Следовательно, у А, Б и В вместе было 42 + 62 + 22 = 126 очков, а остальные 168 – 126 = 42 очка были у Г.

Ответ. 42 очка.

Задачи на совместную работу

Рассмотрим задачи на совместное или последовательное выполнение различных заданий разными работниками. «Запланированный» способ решения задач предполагал введение «лишних» букв.

1. А выполнит своё задание за 15 ч, а задание Б — за 30 ч. Б выполнит своё задание — за 25 ч. Во сколько раз производительность труда у Б больше, чем у А? За сколько часов Б выполнит задание А?

Решение. Пусть задание Б состоит из x ед., тогда производительности труда А и Б равны $\frac{x}{30}$ и $\frac{x}{25}$ ед. в час соответственно. У Б производительность труда больше, чем у А в $\frac{x}{25}:\frac{x}{30} = \frac{6}{5}$ раза. Так как А выполняет своё задание за 15 ч, то Б выполнит задание А за $15 : \frac{6}{5} = 12\frac{1}{2}$ ч.

В решении задачи **1** неявно используется обратная пропорциональность. Эта тема будет изучаться в 6 классе, но учащиеся уже владеют ею после практикума по решению задач. Явное же использование обратной пропорциональности приводит к такому решению.

При постоянном объёме работы время работы обратно пропорционально производительности труда, поэтому производительность труда Б больше производительности труда А в 30 : 25 = $\frac{6}{5}$ раза, а время выполнения задания А работником Б равно 15 : $\frac{6}{5}$ = $12\frac{1}{2}$ ч.

Ответ. В $\frac{6}{5}$ раза; за $12\frac{1}{2}$ ч.

2. А выполнит своё задание за 20 ч, Б выполнит своё задание — за 12 ч, а при совместной работе они могут выполнить оба задания за 16 ч. Во сколько раз задание А больше задания Б?

Решение. *I способ.* Пусть задание А состоит из x ед., а задание Б из y ед. Тогда производительности их труда равны $\frac{x}{20}$ и $\frac{y}{12}$ ед. в час соответственно, а вся работа состоит из (x + y) ед., или из $\left(\frac{x}{20}+\frac{y}{12}\right)\cdot 16$ ед. Из равенства $x + y = \left(\frac{x}{20}+\frac{y}{12}\right)\cdot 16$ получим, что $x = \frac{5}{3}y$, т. е. задание А в $\frac{5}{3}$ раза больше, чем задание Б.

II способ (Мишакин М., 5А). За 16 ч совместной работы А выполнил $\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$ своего задания, а Б за 12 часов выполнил своё задание и за 4 часа оставшуюся $\frac{1}{5}$ задания А. Тогда Б на выполнение задания А требуется 4 : $\frac{1}{5}$ = 20 ч, поэтому задание А больше задания Б в $\frac{20}{12}$ = $\frac{5}{3}$ раза.

Ответ. В $\frac{5}{3}$ раза.

3. А может выполнить своё задание за 20 ч, а задание Б — за 15 ч. Б может выполнить своё задание за 10 ч. За сколько часов они выполнят оба задания при совместной работе?

Решение. *I способ.* Пусть задание А состоит из x ед. Тогда задание Б состоит из $\frac{15}{20}x$ = $\frac{3}{4}x$ ед., а задание двух работников состоит из x + $\frac{3}{4}x$ = $\frac{7}{4}x$ ед. За 1 час А выполняет $\frac{1}{20}x$ ед., Б — $\frac{3}{4}x{:}10$ = $\frac{3}{40}x$ ед., а вместе за 1 час А и Б выполнят x + $\frac{3}{40}x$ = $\frac{1}{8}x$ ед. Оба задания при совместной работе они выполнят за $\frac{7}{4}x$: $\frac{1}{8}x$ = 14 ч.

II способ (Касимов И., 5Б). Так как А может выполнить задание Б — за 15 ч, а Б может выполнить своё задание за 10 ч, то производительность труда Б в $\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$ раза больше, чем производительность труда А. Пусть А и Б работали 10 ч. А выполнил половину своего задания, Б выполнил всё своё задание, им осталось при совместной работе выполнить половину задания А. Так как производительность их совместной работы в $1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ раза больше, чем производительность А, то при совместной работе половину задания А они выполнят за $10:\frac{5}{2}=4$ ч, а на всю работу затратят 10 + 4 = 14 ч.

Ответ. За 14 ч.

4. А, Б и В имеют каждый своё задание. А выполнит задание Б за 10 ч, Б выполнит задание В за 15 ч, В выполнит задание А за 20 ч, а при совместной работе они выполнят все три задания за 15 ч. За сколько часов совместной работы А и В могут выполнить задание Б?

Решение. За 15 часов Б выполнит задание В, поэтому за это время А и В выполнят задания А и Б при совместной работе. Пусть задание А состоит из x ед., а задание Б из y ед. Тогда производительности труда А и В равны $\frac{y}{10}$ и $\frac{x}{20}$ ед. в час соответственно, а производительность их совместной работы равна $\frac{y}{10} + \frac{x}{20}$ ед. в час. За 15 ч совместной работы они выполнят $(x + y)$ ед., или

$$\left(\frac{y}{10}+\frac{x}{20}\right)\cdot 15 = \frac{3y}{2} + \frac{3x}{4} \text{ ед.}$$

Из равенства $x + y = \frac{3y}{2} + \frac{3x}{4}$ получим, что $x = 2y$, поэтому производительность совместной работы А и В равна $\frac{y}{10} + \frac{x}{20} = \frac{y}{5}$ ед. в час. Задание Б в y ед. будет выполнено А и В за $y : \frac{y}{5} = 5$ ч.

Ответ. За 5 ч.

5. А может выполнить задание Б за 10 ч, Б может выполнить задание А за 20 ч, при совместной работе они выполнили оба задания за 16 ч. Сколько часов потратили бы А и Б на последовательное выполнение своих заданий (сначала А выполнит своё задание, потом Б — своё)?

Решение. Пусть задание А состоит из x ед., а задание Б из y ед. Тогда производительности их совместной составляет $\frac{y}{10} + \frac{x}{20} = \frac{2y+x}{20}$ ед. в час. Оба задания состоят из $(x + y)$ ед., или $\frac{2y+x}{20}\cdot 16 = \frac{8y+4x}{5}$ ед. Из равенства $x + y = \frac{8y+4x}{5}$ получим, что $\frac{x}{y} = 3$. На последовательную работу будет затрачено

$$x:\frac{y}{10} + y:\frac{x}{20} = \frac{x}{y}\cdot 10 + \frac{y}{x}\cdot 20 = 30 + \frac{20}{3} = 36\frac{2}{3} \text{ ч.}$$

Ответ. $36\frac{2}{3}$ ч.