§ 12. Описательная статистика

Описательная статистика занимается получением, систематизацией, обработкой и изучением тех или иных данных с использованием различных числовых характеристик.

12.1. Способы представления числовых данных

Одним из способов представления **числовых** данных является **таблица**.

Первая таблица, с которой сталкивается каждый учащийся (и его родители) это табель успеваемости за четверть.

Пример 1. Рассмотрим табель успеваемости ученика 9А класса *Иванова П.* за I четверть

Предмет	Отметка
Русский язык	3
Литература	4
История	3
Алгебра	5
Геометрия	4
Физика	5
Химия	4
…	

Изучая данные этой таблицы, можно заметить, что ученик Иванов П. более склонен к точным наукам, чем к гуманитарным. Такой вывод мы делаем на основе сравнения отметок по предметам естественно-научного цикла (алгебра, геометрия, физика и химия) и гуманитарного цикла (русский язык, литература, история).

Те же числовые данные можно представить в виде **столбчатой диаграммы** (рис. 1) и получить наглядное подтверждение сделанному выше выводу.

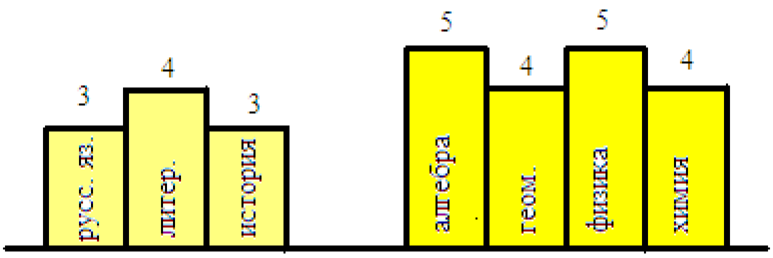


Рис. 1

Для наглядного представления о соотношении частей, составляющих некоторую величину, часто используют **круговые диаграммы**. Круговая диаграмма строится путём разделения круга на секторы. Размер сектора определяется величиной угла, соответствующего доле данной величины среди всех рассматриваемых величин.

Пример 2. Доля продовольственных товаров в объёме розничного товарооборота России составила в 1992 г. 55 %, а в 1997 г. — 49 %, доля непродовольственных товаров составила 45 % и 51 % соответственно.

Построим круговую диаграмму, дающую представление о долях продовольственных и непродовольственных товаров в розничном товарообороте. Построим два круга одинакового радиуса, а для изображения секторов определим величины центральных углов. Так как 1% соответствует $3{,}6^0$, то для продовольственных товаров: $3{,}6^0 \cdot 55 = 198^0$, $3{,}6^0 \cdot 49 = 176{,}4^0$; для непродовольственных товаров $3,6^0 \cdot 45 = 162^0$; $3,6^0 \cdot 51 = 183,6^0$. Разделим круги на соответствующие секторы (рис. 2).

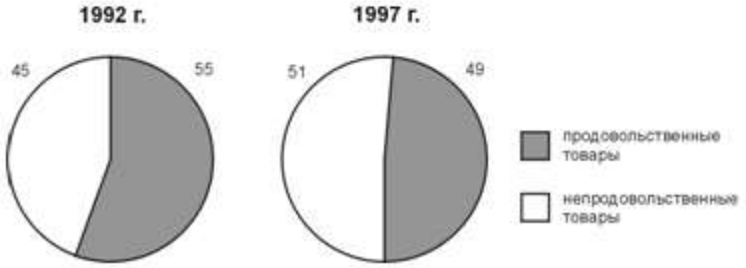


Рис. 2

Для изучения характера изменения величин и взаимосвязи различных величин используют **линейные диаграммы** (графики). Их строят в системе координат. Значения величины изображают точками или другими знаками, которые соединяют ломаными. На ось абсцисс наносят характеристики времени (дни, месяцы, кварталы, годы), а на ось ординат — значения показателя.

Пример 3. На рисунке 3 жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.

Рис. 3

Рассматривая рисунок 3, можно получить ответы на многие вопросы. Например, какова наименьшая цена нефти на момент закрытия торгов в указанный период? (Ответ: 23 доллара). Какого числа уменьшение цены нефти по сравнению с предыдущим днём было наибольшим? (Ответ: 5 апреля),

На одной линейной диаграмме можно построить несколько ломаных, которые позволят сравнить динамику различных показателей или одного и того же показателя в разных регионах, отраслях и др.

Пример 4. На рисунке 4 показано, какое количество автомобилей выпускали два завода в течение года. По горизонтали отложены месяцы, а по вертикали — общее количество автомобилей, выпущенное с начала года каждым из заводов, в тысячах штук.

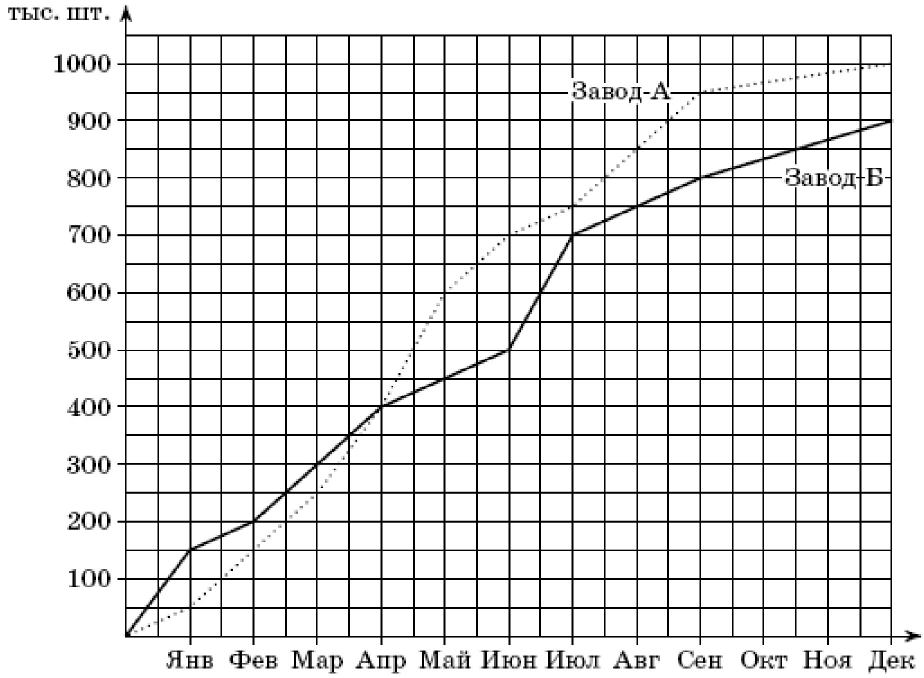


Рис. 4

По диаграмме нетрудно определить, что завод А до апреля выпускал меньше автомобилей, чем завод Б. Отставание составляло в январе, феврале и марте 100, 50 и 50 тыс. шт. соответственно. Начиная с мая, завод А выпускал автомобилей больше, чем завод Б.

Линейная диаграмма позволяет для каждого завода определить месяцы, в течение которых было произведено наибольшее количество автомобилей — 200 тыс. автомобилей. Так завод А произвёл столько автомобилей за май, а завод Б — за июль.

===========

718. В таблице приведены результаты контрольной работы по математике одного класса.

Отметки	5	4	3	2
Число учащихся	4	12	12	2

Постройте по этим данным:

а) столбчатую диаграмму; б) круговую диаграмму.

719. В таблице приведены результаты сдачи экзамена по математике одного класса.

Отметки	5	4	3	2
Число учащихся	3	12	14	1

Постройте по этим данным:

а) столбчатую диаграмму; б) круговую диаграмму.

720. На рисунке 5 жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 12 по 28 ноября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку:

а) наименьшую цену олова на момент закрытия торгов в указанный период;

б) день, в который цена олова на момент закрытия торгов в указанный период была наибольшей;

в) день, в который цена олова на момент закрытия торгов снизилась по сравнению с прошедшим днём на наибольшую величину.

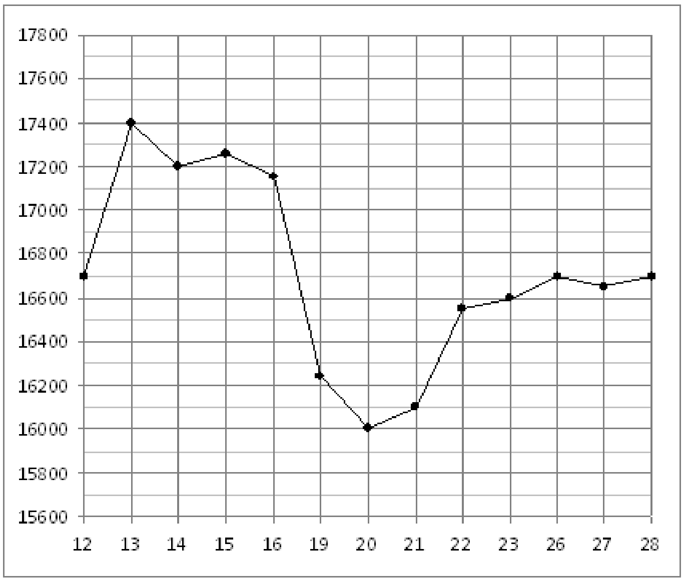


Рис. 5

721. В таблице приведены данные о валовом сборе зерновых культур в двух областях РФ в 2006–2010 годах (млн. ц).

	2006	2007	2008	2009	2010
Новосибирская область	17,6	25,0	25,7	31,9	23,5
Омская область	28,9	30,8	22,9	40,0	22,3

Постройте по этим данным линейные диаграммы.

722. В таблице приведены данные о распределении населения по возрастным группам городского и сельского населения России на 1 января 2007 г., млн. чел.

	Город	Село
Моложе трудоспособного возраста	15,6	7,2
Трудоспособный возраст	67,1	23,1
Старше трудоспособного возраста	21,1	8,2

Представьте данные тем способом, который вы считаете более наглядным.

723. Ищем информацию. Используя справочную литературу и Интернет, приведите примеры различных способов представления числовых данных.

724. В некотором царстве, в некотором государстве в ходе выборов в парламент по телевидению показали ход голосования в одном из избирательных округов (рис. 6). Объясните, почему представленная информация о числе голосов избирателей, поданных за партии, не является достоверной.

Рис. 6

12.2. Характеристики числовых данных

При обработке и анализе той или иной совокупности числовых данных используют различные их характеристики.

ПРИМЕР 1. Отметки ученика по математике составляют ряд значений: 4, 4, 3, 3, 4, 5, 4. Что можно сказать об этом наборе числовых данных?

Можно определить «средний» балл ученика. Для этого обычно используется **среднее арифметическое** данных чисел — частное их суммы и количества. Среднее арифметическое данного ряда значении равно $\frac{4+4+3+3+4+5+4}{7} \approx$ 3,86, оно близко к отметке «4».

Это и не удивительно, так как отметка «4» в ряду данных значений встречается чаще других. Такое значение называют модой. **Мода** — это то значение в рассматриваемой совокупности, которое встречается чаще других. Это одна из характеристик этой совокупности.

Слово «мода» имеет ещё один смысл — это непродолжительное господство определённого вкуса в какой-либо сфере жизни или культуры (в одежде, например, в выборе цвета автомобиля и т. п.).

Мода как средняя величина употребляется чаще для данных, имеющих нечисловую природу. Среди перечисленных цветов автомобилей — белый, чёрный, синий металлик, белый, синий металлик, белый — чаще встречается белый цвет, это и есть мода данного ряда. С помощью моды определяют наиболее популярные типы продукта, что учитывается при прогнозе продаж или планировании их производства.

Иногда в совокупности может быть более чем одна мода. Например, совокупность числовых данных 2, 6, 6, 6, 8, 9, 9, 9, 10 имеет две моды — 6 и 9.

В этой совокупности числовых данных, выписанных в порядке неубывания, число 8 играет особую роль. Оно делит совокупность на две равные (по количеству элементов) части. Такое число в совокупности числовых данных называют медианой. Медиана делит неубывающую последовательность числовых данных на две равные части: сколько «нижних» единиц ряда данных будут иметь значения не большие, чем медиана, столько же «верхних» будут иметь значения не меньшие, чем медиана.

Если совокупность содержит чётное число членов и средние её члены равны, то каждое из них является медианой. Например, в совокупности 2, 6, 6, 6, 9, 10 медианой является число 6. Если совокупность содержит чётное число членов и средние её члены не равны, то медианой совокупности считают среднее арифметическое двух средних значений. Для совокупности 2, 6, 6, 6, 8, 9, 9, 10 медианой считают число $\frac{6+8}{2}=7$.

Для характеристики совокупности числовых данных используют ещё одну величину — **размах** — разность между наибольшим и наименьшим значениями результатов наблюдений. В совокупности 2, 6, 6, 6, 8, 9, 9, 10 размах равен 10 - 2 = 8.

ПРИМЕР 2. Десять предпринимателей сделали вклады в благотворительный фонд (в условных единицах): 5, 5, 5, 10, 10, 10, 10, 20, 25, 1000. Определим среднее арифметическое, моду, медиану и размах этой совокупности.

Среднее арифметическое этих чисел равно $\frac{5+5+5+10+10+10+10+20+25+1000}{10}=110$,

мода 10, медиана 10, размах 995.

Заметим, что среднее арифметическое 110 в этом примере даёт неточное представление о «среднем» взносе каждого предпринимателя, медиана 10 показывает, что половина взносов не больше 10, а другая половина взносов не меньше 10. Размах 995 показывает разность между наибольшим и наименьшим взносами.

Характеристикой совокупности значений может служить и набор их отклонений от среднего арифметического этой совокупности. Выпишем набор отклонений в примере 2:

–105, –105, –105, –100, –100, –100, –100, –100, –90, –85, + 890.

Как видно, отклонения могут быть положительными и отрицательными, маленькими или большими (по абсолютной величине), сумма отклонений данной совокупности равна нулю. Этим свойством обладает сумма отклонений для любой совокупности, поэтому сумма отклонений не может быть характеристикой совокупности.

Обычно для совокупности вычисляют сумму квадратов отклонений, а так как совокупности могут иметь различное количество чисел, то вычисляют ещё среднее арифметическое квадратов отклонений. Эту величину называют **дисперсией** (от лат. *dispersio* — рассеяние).

Пример 3. В результате измерения (в градусах Цельсия) температуры воздуха в Москве в течение семи дней в июле месяце получена совокупность значений: 15, 15, 18, 19, 19, 16, 17 («среднее» значение $\frac{15+15+18+19+19+16+17}{7}$ = 17). В августе в течение пяти дней провели аналогичные измерения и получили новые значения: 19, 17, 15, 15, 14 («среднее» значение $\frac{19+17+15+15+14}{5}$ = 16). Вычислим дисперсию для каждой совокупности.

Выпишем в виде таблицы числовые данные, отклонения и квадраты отклонений для каждой совокупности.

Таблица 1

Числовые данные	15	15	18	19	19	16	17
Отклонения от среднего	–2	–2	+1	+2	+2	–1	0
Квадраты отклонений	4	4	1	4	4	1	0

Таблица 2

Числовые данные	19	17	15	15	14
Отклонения от среднего	+3	–1	–1	–1	–2
Квадраты отклонений	9	1	1	1	4

Дисперсия первой совокупности равна $\frac{4+4+1+4+4+1+0}{7}$ = $\frac{18}{7}$ = $2\frac{4}{7}$, а дисперсия второй совокупности равна $\frac{9+1+1+1+4}{5}$ = $\frac{16}{5}$ = 3,2. Следовательно, дисперсия первой совокупности меньше, чем дисперсия второй. Это означает, что за выбранное время наблюдений температура отклонялась от «среднего» значения больше в августе, чем в июле.

=================

725. За первый час были проданы мужские рубашки новой коллекции следующих цветов: розовый, белый, зелёный, зелёный, белый, голубой, голубой, белый, голубой, белый. Определите моду этой совокупности.

726. Определите среднее число очков, выпадающих на игральном кубике, на котором точками отмечены числа 1, *2,* 3, 4, 5, 6. Какая из характеристик (среднее арифметическое, мода, медиана, размах) указывает на это число?

727. В двадцати классах средней школы учится 580 школьников. Выпишем их распределение по классам в неубывающем порядке:23, 24, 24, 25, 25, 26, 26, 27, 28, 28, 30, 30, 30, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 36. Определите среднее арифметическое, моду, медиану и размах этой совокупности числовых данных.

728. В таблице отражена динамика курсов доллара и евро (десять значений, округлённых до десятых) в октябре 2009 г.

Доллар	30,1	29,8	29,8	29,6	29,6	29,6	29,5	29,5	29,3	29,3
Евро	44,0	44,0	43,8	43,8	43,6	43,5	43,6	43,9	43,8	43,7

Определите среднее арифметическое, моду, медиану и размах совокупности числовых данных: а) для доллара; б) для евро.

729. Два стрелка на тренировке показали результаты, представленные в таблице. Здесь для каждого стрелка выписано количество выбитых очков для каждого из 10 выстрелов.

Первый стрелок	7	8	7	9	10	7	8	9	10	10
Второй стрелок	7	6	8	9	9	8	9	9	8	7

Вычислите среднее значение и дисперсию: для первого стрелка; для второго стрелка. Сделайте выводы из проведённого исследования.

730. Шериф полиции, только вступивший в должность, упомянул о резком росте преступности в округе при его предшественнике и для убедительности показал диаграмму числа преступлений за два года, предшествующие его назначению (рис. 7). Действительно ли преступность резко возросла?

731. Ищем информацию. Используя данные из справочной литературы и Интернета, приведите примеры применения отклонений от «среднего» значения и дисперсии для характеристики совокупности данных.

732*. Доказываем. Докажите свойства дисперсии:

а) Если все числовые значения совокупности уменьшить (увеличить) на одну и ту же постоянную величину, то дисперсия от этого не изменится.

б) Если все числовые значения совокупности уменьшить (увеличить) в k раз, то дисперсия уменьшится (увеличится) в k^2 раз.

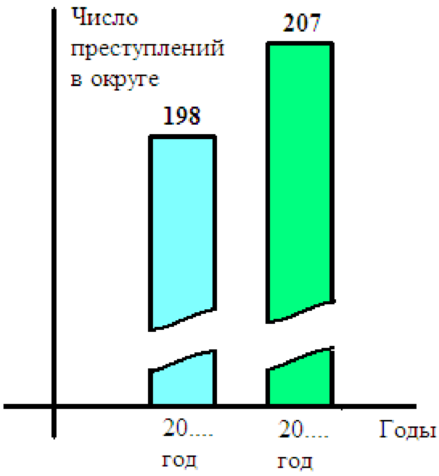


Рис. 7

§ 13. Комбинаторика

Комбинаторика занимается изучением задач выбора и расположения элементов некоторого (обычно конечного) множества в соответствии с заданными правилами.

13.1. Задачи на перебор всех возможных варианов

Рассмотрим задачи, в которых требуется осуществить перебор всех возможных вариантов или подсчитать их число.

Задача 1. Запишите все трёхзначные числа, в записи которых используются цифры 1, 2 и 3 без повторения.

Решение. Запишем в порядке возрастания все числа, удовлетворяющие условию задачи: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Задача 2. Сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 1, 2 и 3?

Решение. В отличие от задачи 1, здесь можно повторять цифры. Чтобы ответить на вопрос задачи, можно выписать все искомые числа:

11	21	31
12	22	32
13	23	33.

Но можно рассуждать и так. На первом месте может стоять одна из трёх цифр: 1, 2 или 3. В каждом из этих трёх случаев на второе место можно поставить одну из трёх цифр: 1, 2 или 3. Итого, имеется $3 \cdot 3 = 9$ двузначных чисел, записанных цифрами 1, 2 и 3.

Ответ: 9.

Убедимся тем же способом, что в задаче 1 можно составить только 6 чисел. На первое место можно поставить любую из трёх цифр, на второе место можно поставить только одну из двух оставшихся, т. е. имеется $3 \cdot 2 = 6$ возможностей занять два первых места. В каждом из этих шести случаев третье место займет оставшаяся третья цифра. Всего, таким образом, можно составить только 6 трёхзначных чисел.

Тот же результат можно получить, используя так называемое «дерево возможностей» или «дерево перебора». От его корня, отмеченного на рисунке 8 звёздочкой (*), проведём три отрезка, соответствующих трём возможностям поставить цифру на первое место и поставим первую цифру 1, 2, 3. От каждой из этих цифр проведём по два отрезка, соответствующих двум возможностям поставить цифру на второе место, поставим вторую цифру. Наконец, от каждой из этих вторых цифр проведём по одному отрезку, соответствующему одной возможности поставить цифру на третье место, поставим третью цифру.

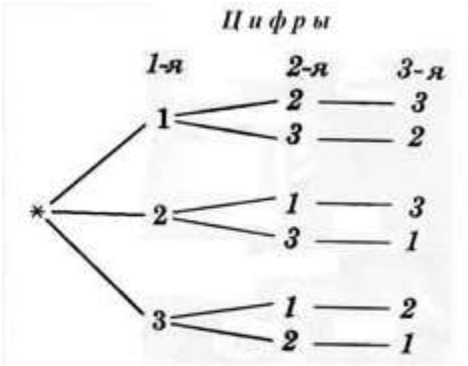


Рис. 8

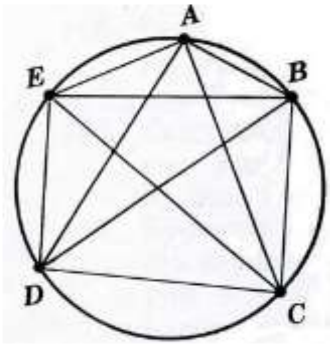
Задача 3. На окружности отмечено 5 точек: *A, B, C, D, E.* Каждую точку соединили с каждой. Сколько отрезков получилось?

Решение. На рисунке 9 отрезки можно пересчитать — их 10. Но при большом числе точек такой пересчёт может привести к ошибке.

Решим задачу вторым способом. Из точки *A* проведено 4 отрезка: *AB, AC, AD, AE;* из точки *B* можно провести тоже 4 отрезка, но один из них (*AB*) уже учтён, значит, из *B* выходят 3 новых отрезка. Из *C* выходят 2 новых отрезка, из *D* — один. Из точки *E* выходят 4 отрезка, но все они уже учтены. Итого, имеется 4 + 3 + 2 + 1=10 отрезков.

Решим задачу ещё одним способом. И *A* выходят 4 отрезка: *AB, AC, AD, AE.* Из *B* выходят 4 отрезка: *BA, BC, BD, BE* и т. д.

Из каждой из пяти точек выходят по четыре отрезка. Но чтобы получить ответ, надо произведение 4 · 5 разделить на 2, так как каждый из отрезков в этих перечислениях назван дважды. Итак, всего отрезков — 10.



Ответ: 10.

Рис. 9

==============

733 Запишите все двузначные числа, в записи которых используются цифры:
а) 5, 6, 7 без повторения; б) 5, 6, 7 с повторением;
в) 7, 8, 9 без повторения; г) 7, 8, 9 с повторением.

734. Запишите все двузначные числа, в записи которых используются цифры 0, 1, 2:
а) без повторения; б) с повторением.

735. Сколько двузначных чисел можно записать цифрами 1, 2, 3:
а) с повторением цифр; б) без повторения цифр?

736. Сколько двузначных чисел можно записать цифрами 0, 2, 4, 6:
а) с повторением цифр; б) без повторения цифр?

737. Четыре друга купили четыре билета в кино. Сколькими различными способами они могут занять свои места в зрительном зале?

738. Сколько двузначных, трёхзначных, четырёхзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4:
а) без повторения; б) с повторением?

739. Бросили два игральных кубика. Сколькими различными способами могут выпасть очки на этих кубиках?

740. а) На окружности отметили 7 точек. Сколько получится отрезков, если соединить каждую точку с каждой?
б) Встретились 7 друзей, каждый пожал руку каждому. Сколько было рукопожатий?

741. Восемь друзей решили провести турнир по шашкам так, чтобы каждый сыграл с каждым, одну партию. Сколько партий будет сыграно?

742*. **исследуем.** а) Встретились несколько друзей, каждый пожал руку каждому. Вова Веселов был так рад встрече, что пожал руку дважды некоторым из своих друзей, но не всем. Всего было 30 рукопожатий. Сколько друзей встретилось?

б) Встретились несколько друзей, каждый пожал руку каждому. Последним пришёл Петя Угрюмов, он пожал руку не всем своим друзьям. Всего было 30 рукопожатий. Сколько друзей встретилось?

13.2. Комбинаторные правила

Задачи, в которых надо найти число возможных вариантов для той или иной операции, того или иного события, называют **комбинаторными задачами**. Решению комбинаторных задач помогают комбинаторные правила.

Правило сложения. Если имеется m способов выбрать элемент a и (независимо от них) n способов выбрать элемент b, то выбрать один элемент — или a, или b — можно $m + n$ способами.

Например, если в классе 12 мальчиков и 15 девочек, то выбрать одного человека — мальчика или девочку — можно 12 + 15 = 27 способами.

Правило сложения можно обобщить для большего числа элементов.

Если имеется m способов выбрать элемент a, n способов выбрать элемент b, ... k способов выбрать элемент t, то выбрать один элемент — или a, или b, ... или t — можно $m + n + ... + k$ способами.

Например, если на столе лежат 3 яблока, 4 апельсина и 6 мандаринов, то выбрать один плод можно 3 + 4 + 6 = 13 способами.

Правило умножения. Если имеется m способов выбрать элемент a и n способов выбрать элемент b, то пару (a, b) можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Например, если в классе 12 мальчиков и 15 девочек, то выбрать одну пару — мальчика и девочку — можно 12 · 15 = 180 способами.

Правило умножения можно обобщить для большего числа элементов.

Если имеется m способов выбрать элемент a, n способов выбрать элемент b, ... k способов выбрать элемент t, то набор $(a, b, ..., t)$ можно выбрать $m \cdot n \cdot ... \cdot t$ способами.

Например, если на столе лежат 3 яблока, 4 апельсина и 6 мандаринов, то яблоко, апельсин и мандарин можно выбрать 3 · 4 · 6 = 72 способами.

Комбинаторные правила позволяют находить решение задач, которые могут возникнуть на практике.

Задача 1. Из 25 учащихся класса нужно выбрать старосту класса и его заместителя. Сколькими способами можно осуществить выбор?

Решение. Старостой класса можно выбрать любого из 25 учащихся, а его заместителем — любого из 24 оставшихся учащихся. По правилу умножения имеется 25 · 24 = 600 способов выбрать старосту класса и его заместителя.

Задача 2. Из города A в город В ведут две дороги, из города B в город C – три дороги, из города C в город D две дороги. Туристы хотят проехать из города A в город D через города B и C. Сколькими способами они могут выбрать маршрут?

Решение. Маршрут из A в B туристы могут выбрать 2 способами. В каждом случае они могут ехать из B в C тремя способами. Значит, имеется 2 · 3 = 6 способов проехать из A в C. Для каждого из этих шести способб имеется 2 способа проехать из C в D. Таким образом, всего существует 2 · 3 · 2 = 12 способов проехать из A в D.

Тот же результат получим по правилу умножения: 2 · 3 · 2 = 12.

Задача 3. Сколько различных автомобильных номеров можно получить, используя три буквы из 30 букв русского алфавита (без ь, ъ, ы) и четыре цифры из десяти (от 0 до 9), если цифры и буквы разрешается повторять и номер должен иметь вид как на рисунке 10?

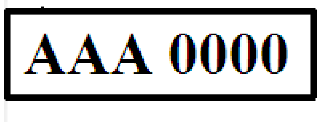


Рис. 10

Решение. Поставить на одно место любую из трёх букв можно тридцатью способами, а любую из четырёх цифр — 10-ю способам. Тогда по правилу умножения число всех номеров равно 30 · 30 · 30 · 10 · 10 · 10 · 10 = 270 000 000.

=================

743. На тарелке лежат 5 мандаринов и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать или мандарин, или апельсин?

744. На тарелке лежат 5 мандаринов и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один мандарин и один апельсин?

745. В классе 12 мальчиков и 15 девочек. Нужно выбрать старосту класса и его заместителя. Сколькими способами можно осуществить выбор?

746*. В классе 12 мальчиков и 15 девочек. Нужно выбрать старосту класса и его заместителя. Сколькими способами можно осуществить выбор, если это должны быть:

а) два мальчика; б) две девочки;

в) мальчик староста и девочка заместитель;

г) девочка староста и мальчик заместитель;

д) мальчик и девочка (старостой может быть и мальчик, и девочка)?

747. Сколькими способами:

а) 3 человека могут разместиться на трёхместной скамейке;

б)3 человека могут разместиться на четырёхместной скамейке;

в) 4 человека могут разместиться на четырёхместной скамейке?

748. Сколько различных автомобильных номеров можно получить, используя три буквы из 30 букв русского алфавита (без ь, ъ, ы) и четыре цифры из десяти (от 0 до 9), если цифры и буквы повторять не разрешается и номер должен иметь вид как на рисунке 10?

749. В классе 12 мальчиков и 15 девочек. Для генеральной уборки школы надо выбрать трёх мальчиков и четырёх девочек. Сколькими способами это можно сделать.

750. В кафе предлагают два первых блюда: борщ, рассольник, четыре вторых блюда: гуляш, котлеты, сосиски, пельмени и три третьих блюда: чай, кофе, компот. Сколько вариантов обеда предлагают в кафе?

751. Сколько решений в натуральных числах имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} a+b=4, \\ c+d=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a+b=5, \\ c+d=5? \end{cases}$ в) $\begin{cases} a+b=4, \\ c+d=6? \end{cases}$

13.3. Перестановки

Произведение всех n натуральных чисел от 1 до n ($n > 1$) обозначают $n!$ («эн факториал»):

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n!$$

Например, $2! = 1 \cdot 2$, $3!=1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, ... $1!$ считают равным 1: $1! = 1$.

Рассмотрим все способы записать в ряд две буквы a и b. Таких способов два:

$$ab,\ ba.$$

Три буквы a, b и c можно записать в ряд шестью способами: *abc, acb, bca, bac, cab, cba.*

На первое место поставим букву a и к ней двумя способами припишем оставшиеся буквы b и c. Потом на первое место поставим букву b и к ней двумя способами припишем оставшиеся буквы a и c. Наконец, на первое место поставим букву c и к ней двумя способами припишем оставшиеся буквы a и b. Всего получилось $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ способов.

Перестановкой из n элементов называют какое-либо расположение этих элементов в определённом порядке. Количество перестановок из n элементов принято обозначать P_n (перестановка по-французски *permulation*).

Справедлива формула

$$P_n = n!$$

Для $n = 1$ формула верна по определению. Для $n = 2$, 3 она уже проверена нами. Чтобы проверить её для $n = 4$, рассуждаем так. Составим четыре ряда перестановок для цифр 1, 2, 3, 4. В первый ряд поставим все перестановки, начинающиеся с 1:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432.

Таких перестановок $6 = 3!$, т. е. столько, сколько раз можно переставить три цифры 2, 3, 4, стоящие после цифры 1.

Но на первое место можно поставить любую из четырёх цифр, и в каждом таком случае получится 6 перестановок, т. е. всего перестановок

$$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3! = 4!$$

Доказать, что $P_n = n!$ для любого натурального числа n можно с помощью метода математической индукции .

=============

752. Что называют перестановкой из n элементов?

753. Что обозначает и как читается запись: а) 2!; б) 3!; в) 6!; г) n! ?

754. Выпишите все перестановки из цифр 1, 2, 3. Чему равно P_3?

755. Выпишите все возможные перестановки из четырёх букв и подсчитайте их количество (P_4).

756. Проказница-Мартышка, Осёл, Козёл да Косолапый Мишка затеяли сыграть квартет. Выясните, сколькими способами они могут сесть со своими инструментами на четыре места.

757. Вычислите:

а) P_5; б) P_6; в) P_7.

758 Верно ли, что:

а) $P_5 = 5 \cdot P_4$; б) $P_6 = 6 \cdot P_5$; в) $P_{100} = 100 \cdot P_{99}$; г) $P_n = n \cdot P_{n-1}$ $(n > 1)$?

759. Вычислите:

а) $P_{10} : P_9$; б) $P_{50} : P_{49}$; в) $P_{20} : P_{18}$.

760. У кассира автобуса имеются для продажи билеты на автобус с номерами от 000000 до 999999. Сколько номеров билетов из этого набора записаны цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторения?

13.4. Размещения

Размещением из n элементов $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ по два называют любую упорядоченную пару, составленную из данных n элементов. Количество размещений из n элементов по два обозначают через A_n^2 (размещение по-французски *arangement*).

Ниже выписаны все размещения из 3 элементов по 2:

$$x_1x_2,\quad x_1x_3,$$
$$x_2x_1,\quad x_2x_3,$$
$$x_3x_1,\quad x_3x_2.$$

В первом ряду на первом месте стоит элемент x_1, к нему приписаны поочерёдно остальные два элемента. Получилось, что в первом ряду находятся все размещения, начинающиеся с x_1, — их два. Во втором и в третьем рядах находятся тоже по два размещения, начинающихся с x_2 и с x_3. Таким образом, $A_3^2 = 3 \cdot 2$.

Размещения из n элементов по два можно расположить в n рядов. В каждом из них на первом месте стоит один из данных элементов x_i, к нему поочерёдно приписываются остальные $n - 1$ элементов. Этим мы доказали формулу

$$A_n^2 = n(n-1). \qquad (1)$$

Пример. Сколькими способами можно распределить два билета на разные кинофильмы между семью друзьями?

Число способов, с помощью которых можно распределить два билета на разные кинофильмы между семью друзьями, равно $A_7^2 = 7 \cdot (7-1) = 42$.

Чтобы в этом убедиться, выпишем все возможные размещения в виде двузначных чисел, первая цифра которых показывает, какому другу достался первый билет, вторая — какому второй:

12, 13, 14, 15, 16, 17,
21, 23, 24, 25, 26, 27,
. . . .
71, 72, 73, 74, 75, 76.

В каждом из семи рядов по 6 размещений — всего $7 \cdot 6 = 42$ размещения, т. е. число способов распределения двух билетов в данной задаче равно 42.

Размещением из n элементов по k называют любой упорядоченный набор из k элементов, составленный из данных n элементов.

Количество размещений из n элементов по k обозначают через A_n^k. Например, A_n^3 находим следующим образом. Расположим размещения в n рядов. В i-м ряду поместим размещения, начинающиеся с элемента x_i. После элемента x_i поставим все возможные размещения из оставшихся $n - 1$ элементов по 2, т. е. $(n - 1)(n - 2)$ различных размещений. Но всего строк n, поэтому $A_n^3 = n(n - 1)(n - 2)$.

Рассуждая подобным же образом, получим, что

$$A_n^4 = n(n - 1)(n - 2)(n - 3).$$

Можно доказать, что

$$A_n^k = n(n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) \ (1 < k \le n).$$

Заметим, что любое размещение из n элементов по n — это одна из перестановок из n элементов, поэтому

$$A_n^n = n(n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

================

761. Выпишите все размещения из четырёх элементов x_1, x_2, x_3, x_4 по два. Чему равно A_4^2?

762. Вычислите:

а) A_4^3; б) A_5^2; в) A_5^3; г) A_7^4; д) A_7^5; е) A_8^6.

763. Доказываем. Докажите формулу: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ для $1 < k < n$.

764. а) Сколькими различными способами можно распределить между шестью лицами две разные путевки в санатории?

б) Сколькими способами можно присудить трём лицам из шести три разные премии?

765. В турнире участвуют семь шахматистов. Сколькими способами могут распределиться между ними три первых места (каждое место должен занять один шахматист)?

766. У билетного кассира имеются для продажи билеты на автобус с номерами от 000000 до 999999. Сколько номеров билетов из этого набора записаны разными цифрами?

767*. У билетного кассира имеются для продажи билеты на автобус с номерами от 000000 до 999999. Сколько номеров билетов из этого набора записаны без нулей?

768*. У кассира автобуса имеются для продажи билеты на автобус с номерами от 000000 до 999999. Счастливым назовём билет, у которого сумма первых трёх цифр совпадает с суммой последних трёх цифр.

а) Сколько существует счастливых билетов, у которых сумма всех цифр равна 0; 2; 4; 6; 8?

б) Сколько всего счастливых билетов у кассира?

13.5. Сочетания

Сочетанием из n элементов по k называют любую группу из k элементов, составленную из данных n элементов $(1 \le k \le n)$.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают через C_n^k (сочетание по-французски *combination*).

Всякое размещение по k элементов можно рассматривать как сочетание. Разница заключается в том, что если в размещении переставить местами элементы, то получится другое размещение, а сочетание не зависит от порядка входящих в него элементов.

Вычисляя A_n^2, мы получаем пары, отличающиеся порядком элементов, например x_1x_2 и x_2x_1. Из двух элементов можно составить $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$ пары, поэтому $A_n^2 = 2! \cdot C_n^2 = P_2 \cdot C_n^2$, следовательно, $C_n^2 = \dfrac{A_n^2}{P_2}$.

Вычисляя A_n^k, мы получаем наборы из k элементов, отличающиеся порядком элементов, где $1 < k < n$. Из k элементов можно составить $P_k = k! = k(k - 1)(k - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ групп элементов, поэтому

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = P_k \cdot C_n^k,$$

откуда $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Следовательно,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Эта формула доказана выше для $k > 1$, но она верна и для $k = 1$. Поэтому она справедлива для $1 \le k \le n$.

Пример. Сколькими различными способами из семи участников математического кружка можно составить команду из двух человек для участия в олимпиаде?

Так как порядок, в котором будут выбраны два человека, не важен, то число различных способов составить команду равно:

$$C_7^2 = \frac{A_7^2}{P_2} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21.$$

================

769. Выпишите все сочетания из пяти элементов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 по два. Чему равно C_5^2.

770. Вычислите:

а) C_4^3; б) C_5^4; в) C_5^3; г) C_7^4; д) C_7^5; е) C_8^6.

771. Докажите формулу: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ для $1 \le k < n$.

772. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$ для $1 \le k < n$. Вычислите:

а) C_{10}^9; б) C_{10}^8; в) C_{12}^{10}; г) C_{12}^{11}; д) C_{200}^{199}; е) C_{1998}^{1997}.

773. а) Сколькими способами можно распределить две одинаковые путевки между пятью лицами?

б) Сколькими способами можно присудить трём лицам из шести три одинаковые премии?

774. Из восьми фильмов жюри конкурса может отобрать трёх финалистов. Сколькими способами это можно сделать?

775. Из 27 учащихся класса нужно выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

§ 14. Введение в теорию вероятностей

Теория вероятностей занимается изучением числовых характеристик возможности осуществления какого-либо события при тех или иных условиях.

14.1. Случайные события

Далее будем рассматривать опыты (эксперименты, испытания), в результате проведения каждого из которых возможен только один из n ($n > 1$) заранее известных исходов, но также заранее не известно, какой именно исход осуществится в этом опыте. Такие опыты называют **случайными опытами**.

Будем также предполагать, что до проведения опыта нельзя отдать предпочтение тому или иному исходу, и что каждый опыт можно многократно повторить в одних и тех же условиях. В таком случае будем говорить, что у данного опыта имеется n **равновозможных исходов**.

Приведём примеры случайных опытов, имеющих несколько равновозможных исходов.

Опыт 1. Подбрасывание монеты. Этот опыт может завершиться только одним из двух исходов: выпадением или герба, или решки, и эти два исхода равновозможны.

Опыт 2. Подбрасывание игрального кубика. Этот опыт может завершиться только одним из шести исходов: выпадением или 1, или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков, и эти шесть исходов равновозможны.

Опыт 3. Извлечение шара из урны, в которой находятся три одинаковых шара пронумерованные числами от 1 до 3. Этот опыт может завершиться только одним из трёх исходов: извлечён шар с номером k, где k или 1, или 2, или 3, и эти три исхода равновозможны.

Опыт 4. Извлечение из комплекта домино (28 костей) одной кости. Этот опыт может завершиться только одним из 28 исходов: извлечена данная кость, и эти 28 исходов равновозможны.

Опыт 5. Извлечение из колоды карт (36 карт) одной карты. Этот опыт может завершиться только одним из 36 исходов: извлечена данная карта, и эти 36 исходов равновозможны.

При изучении случайного опыта часто рассматривается не только вопросы о том, какие исходы возможны и равновозможны ли они, но и другие вопросы. Например, при изучении опыта 2 можно рассмотреть вопрос: выпало ли чётное число очков? Если да, то говорят, что произошло событие, заключающееся в том, что выпало чётное число очков, или коротко: произошло событие A — выпало чётное число очков. При изучении опыта 5 можно рассмотреть события: B — «вынут туз», C — «вынута дама», D — «вынута пиковая карта» и т. п.

Далее каждый раз будем рассматривать только один случайный опыт, и лишь те события, которые могут произойти в результатае этого опыта. Обычно в данном опыте про каждое событие нельзя утверждать, что оно обязательно произойдёт в этом опыте. Такие события называют **случайными событиями**. Далее будем рассматривать только случайные события. Приведём примеры случайных событий.

В опыте 2 может произойти случайное событие A — «выпало нечётное число очков» (или 1, или 3, или 5); или событие B — «выпало простое число очков» (или 2, или 3, или 5).

В опыте 4 может произойти случайное событие C — будет извлечена кость с суммой очков 3. Ясно, что это событие произойдёт лишь в двух случаях: если будет извлечена или кость (0, 3), или кость (1, 2) (рис. 11).

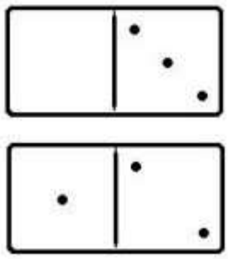


Рис. 11

В опыте 5 может произойти случайное событие D — будет извлечен туз. Ясно, что это событие произойдёт, если будет извлечён туз любой масти из четырёх: или туз трефовый или туз пиковый, или туз бубновый или туз червовый.

В данном опыте каждый его исход является событием. Чтобы отличать исходы от других событий, будем называть их **элементарными событиями**.

Так, в опыте 2 событие «выпало 2 очка» — элементарное, а события A и B не элементарные; в опыте 4 событие C не элементарное; в опыте 5 событие «извлечён трефовый туз» — элементарное, а событие D не элементарное.

Если событие A элементарное, то оно может произойти, если будет получен один из n исходов данного опыта, и этот исход называют **благоприятствущим** событию A. Говорят также, что этот исход благоприятствует событию A.

Например, в опыте 2 элементарному событию «выпало 6 очков» благоприятствует только один исход «выпало 6 очков».

В опыте 2 событие B может произойти, если произойдёт один из следующих исходов: выпадет или 2, или 3, или 5 очков. Эти три исхода называют **благоприятствующими** событию B. Говорят также, что каждый из этих исходов благоприятствует событию B.

Про те исходы, при которых происходит случайное событие A, говорят, что они **благоприятствуют** событию A.

Если событие не может произойти в данном опыте, то его называют **невозможным событием**. Например, в опыте 2 выпадение нуля очков есть невозможное событие. Если случайное событие — невозможное, то нет исходов данного опыта, при которых оно происходит. В таких случаях говорят, что невозможному событию благоприятствует 0 исходов.

Если событие обязательно произойдёт в данном опыте, то его называют **достоверным событием**. Например, в опыте 2 выпадение не более 6 очков является достоверным событием. Если случайное событие — достоверное, то оно происходит при любом из всех n исходов данного опыта, т. е. все n исходов благоприятствуют этому событию.

Таким образом, если в данном опыте возможны n исходов, то любое случайное событие в нём произойдёт, если ему благоприятствует k заранее определённых исходов, где $k = 0, 1, ..., n$.
<u>Далее необязательный материал до упражнений.</u>

* Все обсуждённые выше понятия можно интерпретировать на языке теории множеств.

Если рассмотреть множество Ω, состоящее только из всех n исходов данного опыта, то любое его подмножество можно считать событием в данном опыте. При этом подмножества, состоящие из одного элемента, есть элементарные события. Подмножество, совпадающее со всем множеством Ω, есть достоверное событие. Подмножество, являющееся пустым множеством, есть невозможное событие.

Заметим, что пустое множество является подмножеством любого множества, в том числе и множества Ω. Если множество Ω состоит из n элементов — всех исходов данного опыта, то можно доказать, что всего у этого множества 2^n подмножеств, включая пустое множество и само множество Ω.

При малых значениях n все эти подмножества , т. е. все события в данном опыте можно перечислить.

В опыте 1 будет $2^2 = 4$ события:

1) выпадение и герба, и решки — невозможное событие,
2) выпадение герба — элементарное событие,
3) выпадение решки — элементарное событие,
4) выпадение или герба, или решки — достоверное событие.

В опыте 3 будет $2^3 = 8$ событий: извлечение шара:

1) с номером 0 — невозможное событие,
2) с номером 1 — элементарное событие,
3) с номером 2 — элементарное событие,
4) с номером 3 — элементарное событие,
5) с номером или 2, или 3 (т. е. без номера 1),
6) с номером или 1, или 3 (т. е. без номера 2),
7) с номером или 1, или 2 (т. е. без номера 3),
8) с номером или 1, или 2, или 3 — достоверное событие.*

================

776 (устно)**.** а) Какие опыты называют случайными опытами? Приведите пример.

б) В каком случае говорят, что у данного опыта имеется n равновозможных исходов? Приведите пример.

в) Какое событие называют невозможным событием? Приведите пример.

г) Какое событие называют достоверным событием? Приведите пример.

е) Вы выпускаете яблоко из рук. Каким событием — невозможным или достоверным — является событие A — яблоко упало вниз; B — яблоко упало вверх?

777(устно)**.** В опыте бросают игральный кубик. Каким событием — достоверным или невозможным является:

а) выпадение или чётного, или нечётного числа очков;

б) выпадение семи очков?

778. В опыте бросают игральный кубик. Сколько всего исходов в этом опыте? Сколько исходов благоприятствуют событию:

а) A — «выпало 3 очка»;

б) B — «выпало чётное число очков»;

в) C — «выпало нечётное число очков»;

г) D — «выпало или чётное, или нечётное число очков»?

Какие исходы благоприятствуют каждому из событий A, B, C, D? Какие из событий A, B, C, D являются элементарными событиями?

779. В опыте бросают два игральных кубика. Сколько всего исходов в этом опыте? Сколько исходов благоприятствуют событию:

а) A — «сумма очков равна 0»;
б) «B — сумма очков чётная»;
в) C — «сумма очков нечётная»;
г) «D — сумма очков равна 2»;
д) E — «сумма очков равна 7»;
е) «F — сумма очков равна 8»?

Какие исходы благоприятствуют каждому из событий A, B, C, D, E, F. Какие из событий A, B, C, D, E, F являются элементарными событиями?

780. В опыте из колоды в 36 карт извлекают одну карту. Сколько всего исходов в этом опыте? Сколько исходов благоприятствуют событию:

а) A — «извлечена трефовая дама»;

б) B — «извлечена дама»;

в) C — «извлечена любая трефовая карта»?

Какие исходы благоприятствуют каждому из событий A, B, C? Какие из событий A, B, C являются элементарными событиями?

781*. В опыте подбрасывают две монеты. Сколько всего исходов в этом опыте? Сколько исходов благоприятствуют событию:

а) A — выпали два герба; б) B — выпали две решки;

в) C — выпали герб и решка?

Какие исходы опыта благоприятствуют каждому из событий A, B, C. Какие из этих событий являются элементарными событиями?

782*. В опыте из колоды в 36 карт извлекают две карты. Сколько исходов благоприятствуют событию:

а) A — извлечены две карты черной масти;

б) B — извлечены две карты красной масти;

в) C — извлечены две карты: одна чёрной масти, другая красной?

783*. Сколько событий может произойти в опыте подбрасывания игрального кубика?

14.2. Вероятность случайного события

Как было сказано в предыдущем пункте, если в данном опыте возможны n исходов, то любое случайное событие A в нём произойдёт, если будет получен один из k заранее определённых исходов, благоприятствующих событию A, где $k = 0, 1, ..., n$.

Например, в опыте 2 (подбрасывание игрального кубика) событию A — «выпадет число очков, кратное трём» благоприятствуют только два исхода: «выпадет 3 очка» и «выпадет 6 очков».

Вероятностью случайного события A называют отношение числа m исходов, благоприятстующих событию A, к числу n всех исходов в данном опыте.

Вероятность события A обозначают $P(A)$. Если в опыте возможны n исходов и событию A благоприятствуют m из них, то вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

В приведённом выше примере $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

В этом же опыте событию B — «выпадет простое число очков» благоприятствуют только 3 исхода: «выпадет 2 очка», «выпадет 3 очка» и «выпадет 5 очков», поэтому

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

а событию C — «выпадет 5 очков» благоприятствует только 1 исход: «выпадет 5 очков», поэтому

$$P(C) = \frac{1}{6}.$$

Если события $B_1, B_2, ..., B_n$ — это все элементарные равновозможные события данного опыта, то для любого $k = 1, 2, ..., n$

$$P(B_k) = \frac{1}{n}.$$

Невозможное событие обозначают $\varnothing$. Так как невозможному событию благоприятствуют 0 исходов, то

$$P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0.$$

Достоверное событие обозначают Ω. Так как достоверному событию благоприятствуют все n исходов, то

$$P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1.$$

Вероятность любого события D удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le P\,(D) \le 1.$$

Задача 1. Пусть одновременно подбрасываются две монеты. Одинаковую ли вероятность имеют следующие события:

а) A — выпадение двух гербов;

б) B — выпадение двух решек;

в) C — выпадение одного герба и одной решки?

Решение. При подбрасывании двух монет возможны следующие исходы:

исходы	монета 1	монета 2
1	герб	герб
2	герб	решка
3	решка	герб
4	решка	решка

т. е. имеется 4 равновозможных исхода.

Событию A благоприятствует только первый исход, событию B благоприятствует только четвёртый исход, а событию C благоприятствуют два исхода — второй и третий. Поэтому

$$P\,(A) = P\,(B) = \frac{1}{4};\ P\,(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $P\,(C) > P\,(A)$, $P\,(C) > P\,(B)$, $P\,(A) = P\,(B)$.

Задача 2. Каждый из двух игроков подбрасывает по игральному кубику.

а) Первый игрок выигрывает, если на двух кубиках в сумме выпадает 6 очков. Второй игрок выигрывает, если на двух кубиках в сумме выпадает 7 очков. Одинаковы ли вероятности выигрыша для каждого из игроков?

б) Первый игрок выигрывает, если на двух кубиках в сумме выпадает 6 очков. Второй игрок выигрывает, если на двух кубиках в сумме выпадает 8 очков. Одинаковы ли вероятности выигрыша для каждого из игроков?

Решение. Исходы при побрасывании двух кубиков соответствуют парам чисел (n_1; n_2), где n_1 — число очков, выпавших на первом кубике (n_1 = 1; 2; ...; 6), n_2 — число очков, выпавших на втором кубике (n_2 = 1; 2; ...; 6). Всего таких пар, а следовательно, и исходов будет $6 \cdot 6 = 36$. Все 36 исходов равновозможны.

Пусть событие A — «сумма очков на двух кубиках равна 6». Этому событию благоприятствуют 5 исходов:

$$(1;\ 5),\ (2;\ 4),\ (3;\ 3),\ (4;\ 2),\ (5;\ 1).$$

Пусть событие B — «сумма очков на двух кубиках равна 7. Этому событию благоприятствуют 6 исходов:

$$(1;\ 6),\ (2;\ 5),\ (3;\ 4),\ (4;\ 3),\ (5;\ 2),\ (6;\ 1).$$

Пусть событие C — «сумма очков на двух кубиках равна 8». Этому событию благоприятствуют 5 исходов:

$$(2;\ 6),\ (3;5),\ (4;\ 4),\ (5;\ 3),\ (6;\ 2).$$

а) Первый игрок выигрывает тогда и только тогда, когда наступает событие A. Второй игрок выигрывает тогда и только тогда, когда наступает событие B. Так как

$$P\,(A) = \frac{5}{36};\ P\,(B) = \frac{6}{36},$$

то, вероятность выигрыша у второго игрока больше, чем вероятность выигрыша у первого игрока.

б) Первый игрок выигрывает тогда и только тогда, когда наступает событие A. Второй игрок выигрывает тогда и только тогда, когда наступает событие C. Так как

$$P\,(A) = \frac{5}{36};\ P\,(C) = \frac{5}{36},$$

то вероятности выигрыша для каждого из игроков одинаковы.

При вычислении вероятности случайного события часто пользуются формулами перестановок, размещений и сочетаний.

Задача 3. Один игрок записал четырёхзначное число, используя различные цифры, кроме нуля. Какова вероятность того, что второй игрок угадает это число с первого раза?

Решение. Выясним, сколько четырёхзначных чисел можно записать, используя только один раз цифры 1, 2, 3, ..., 9. Так как любое из этих четырёхзначных чисел является размещением из 9 цифр по 4, то искомое количество чисел равно $A_9^4 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024$.

Таким образом, можно считать, что рассматривается опыт, в котором возможны 3024 исхода, все эти исходы равновозможны, и требуется определить вероятность события A — «угадать один из этих исходов». Как следует из вышеизложенного, $P\ (A) = \frac{1}{3024}$.

Ответ: $\frac{1}{3024}$.

Задача 4.* В праздничной школьной лотерее предлагается угадать n чисел из k. Определите, в какой лотерее вероятность выигрыша больше: в лотерее «2 из 5» или «3 из 6».

Решение. Выясним, сколько существует способов угадать 2 числа из 5. Так как порядок угаданных чисел не важен, то искомое число способов есть число сочетаний из 5 по 2. Оно равно $C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2!} = 10$. Аналогично число способов угадать 3 числа из 6 есть число сочетаний из 6 по 3. Оно равно $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$.

Таким образом, можно считать, что рассматривается два опыта. В первом возможны 10 исходов, все эти исходы равновозможны, и требуется определить вероятность события A — «угадать один из этих исходов», поэтому $P\ (A) = \frac{1}{10}$. Во втором возможны 20 исходов, все эти исходы равновозможны, и требуется определить вероятность события B — «угадать один из этих исходов», поэтому $P\ (B) = \frac{1}{20}$. Так как $\frac{1}{10} < \frac{1}{20}$, то вероятность выигрыша больше в лотерее «2 из 5».

Ответ: вероятность выигрыша больше в лотерее «2 из 5».

===============

784. Ваня, Маша и Петя хотят купить три билета в кино на соседние места. Какова вероятность того, что место Маши окажется посередине, если она выберет один билет из трех случайным образом?

785. Три карты: валет (В), дама (Д), король (К) перемешали и положили в ряд «рубашкой» вверх. Какова вероятность того, что после переворачивания карт:

а) они окажутся в порядке ВДК; б) на первом месте окажется Д;

в) на последнем месте окажется Д; г) на всех трех местах окажется Д?

786. Четыре карты: валет (В), дама (Д), король (К), туз (Т) перемешали и положили в ряд «рубашкой» вверх. Какова вероятность того, что после переворачивания карт:

а) они окажутся в порядке ТКДВ; б) на первом месте окажется Т;

в) на последнем месте окажется Т?

787. Иванов и Степанов входят в группу из семи студентов, имеющих одинаковые шансы получить один из двух разных призов. Какова вероятность того, что:

а) Иванов получит первый приз, а Степанов — второй;

б) Иванов и Степанов получат призы;

в) Иванов получит первый приз;

г) Иванов получит один из двух призов?

788*. Из перетасованной колоды, состоящей из 36 карт, наугад взяты 4 карты. Какова вероятность того, что в эту четвёрку:

а) попадут тузы: бубновый, пиковый, червовый и трефовый в указанном порядке;

б) попадут 4 туза (в любом порядке);

в) попадет туз бубновый и его возьмут первым;

г) попадет туз бубновый?

789*. В лотерее предлагается угадать n чисел из k. Определите, в какой лотерее вероятность выигрыша больше: в лотерее «6 из 49» или «5 из 36».

790*. В некотором царстве, в некотором государстве разбойника приговорили к смертной казни, и он подал царю прошение о помиловании. Добрый царь, большой знаток теории вероятностей, сказал: «Доверимся случаю, пусть разбойник сам решит свою судьбу. Выдайте ему мешок с полным набором костей домино и две игральные кости. Пусть он вытащит из мешка, не глядя, одну кость домино или бросит две игральные кости — по своему выбору. Если полученная в этом испытании сумма очков окажется равной числу, которое он назовёт до начала испытания, то быть по сему — пусть живет». Какой вид испытания должен выбрать разбойник и какую сумму назвать, чтобы вероятность остаться живым оказалась наибольшей?

14.3. Сумма, произведение и разность случайных событий

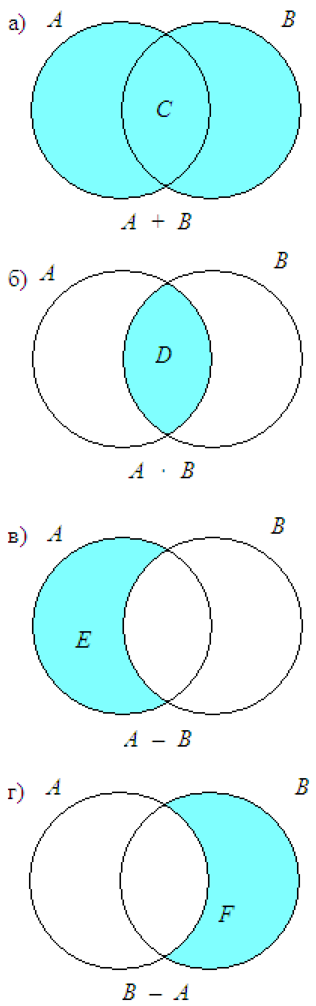


Рис. 12

Будем рассматривать некоторый случайный опыт и события $A, B, C, D, \ldots$ в нём.

Суммой (или объединением) двух событий A и B называют событие C, обозначаемое $A + B$ (или $A \cup B$), состоящее в том, что произошло или событие A, или событие B.

Так, в опыте 2 (подбрасывание игрального кубика) суммой события A — «выпадет простое число очков» и события B — «выпадет число очков, кратное трём» является событие $C = A + B$ — «выпадет либо 2, либо 3, либо 5, либо 6 очков».

Произведением (или пересечением) двух событий A и B называют событие D, обозначаемое $A \cdot B$ (или $A \cap B$), состоящее в том, что произошло и событие A, и событие B.

Так в опыте 2 произведением тех же событий A и B является событие $D = A \cdot B$ — «выпадет 3 очка».

Разностью двух событий A и B называют событие E, обозначаемое $A - B$ (или $A \setminus B$), состоящее в том, что произошло событие A, но не произошло событие B.

Так в опыте 2 разностью тех же событий A и B является событие $E = A - B$ — «выпадет или 2, или 5 очков». А разностью событий B и A является событие $F = B - A$ — «выпадет 6 очков».

Далее необязательный материал до противоположных событий — отмечено звёздочкой).

*Всё сказанное можно интерпретировать на языке теории множеств. Так в опыте 2 событие A задаётся подмножеством $M_1 = \{2, 3, 5\}$ множества $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, событие B — подмножеством $M_2 = \{3, 6\}$ того же множества Ω. Тогда сумма событий $A + B$ задаётся множеством $M_3 = M_1 \cup M_2 = \{2, 3, 5, 6\}$, произведение тех же событий A и B задаётся множеством $M_4 = M_1 \cap M_2 = \{3\}$, разность тех же событий A и B задаётся множеством $M_5 = M_1 \setminus M_2 = \{2, 5\}$, разность тех же событий B и A задаётся множеством $M_6 = M_2 \setminus M_1 = \{6\}$.

События $A + B$, $A \cdot B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$ принято изображать с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 12). *

Событие называют **противоположным** событию A, если оно состоит в том, что не произошло событие A. Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. Очевидно, что событие, противоположное событию $\overline{A}$ есть событие A, т. е. $\overline{\overline{A}} = A$.

Событию $\overline{A}$ благоприятствуют все исходы, которые не благоприятствуют событию A. Если событию A благоприятствуют m исходов из n равновозможных исходов, то событию $\overline{A}$ благоприятствуют $n - m$ исходов. Поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ а } P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n},$$

откуда следует, что $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

События A и $\overline{A}$ называют **противоположными** событиями.

В опыте 2 рассмотрим событие B — «выпадет число очков, кратное 3», $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ему противоположным является событие $\overline{B}$ — «выпадет число очков, равное либо 1, либо 2, либо 4, либо 5». Поэтому $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

События A и $\overline{A}$ исчерпывают все n равновозможных исходов в данном опыте, т. е. событие $A + \overline{A}$ есть достоверное событие Ω:

$$A + \overline{A} = \Omega,$$

поэтому событие $\overline{A}$ есть разность событий Ω и A:

$$\overline{A} = \Omega - A.$$

================

791. В опыте первый ученик просит второго случайным образом назвать однозначное натуральное число. Рассматриваются события A — «будет названо чётное число», B — «будет названо нечётное число», C — «будет названо число, кратное 3», D — «будет названо простое число». Сколько исходов в этом опыте, благоприятствуют событию:

а) $A + B$; б) $A \cdot B$; в) $A - B$; г) $B - A$;
д) $A + C$; е) $A \cdot C$; ж) $A - C$; з) $C - A$;
и) $D + B$; к) $D \cdot B$; л) $D - B$; м) $B - D$.

792. В предыдущем задании найдите события, противоположные событиям A, B, C и D, а также достоверные и невозможные события. Вычислите вероятность каждого события а) – м).

793. Спортивный комментатор оценил вероятность победы лыжника Иванова в 90 %. Какова вероятность (по оценке спортивного комментатора) того, что Иванов не победит?

794 В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

795 В опыте бросают игральный кубик. Какова вероятность события:

а) M — «не выпадет простое число очков»;
б) N — не выпадет число очков, кратное 3»;
в) K — «не выпадет число очков, кратное 2 или 3».

14.4. Несовместные события. Независимые события

События A и B, которые не могут произойти одновременно в одном и том же опыте, называют **несовместными** событиями.

В опыте 2 (подбрасывание игрального кубика) события A — «выпадет нечётное число очков» и B — «выпадет число очков, кратное 4» несовместные события.

События A и B несовместны тогда и только тогда, когда произведение этих событий есть невозможное событие, т. е. если $A \cdot B = \Omega$.

*На языке теории множеств это означает, что события A и B несовместны тогда и только тогда, когда подмножества M_1 и M_2 множества Ω, которые определяют события A и B соответственно, не имеют общих элементов, т. е. если $M_1 \cap M_2 = \Omega$. *

Для несовместных событий A и B справедлива формула сложения вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \tag{1}$$

то есть вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей.

В опыте из колоды (36 карт) случайным образом извлекают одну карту. События A — «извлечен король» и B — «извлечена дама» несовместные события. Так как событие $C = A + B$ — «извлечены либо король, либо дама», то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Действительно, $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $P(C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ и $P(C) = P(A) + P(B)$.

Если события A и B не являются несовместными, то к ним нельзя применить формулу (1). В этом случае справедлива другая формула:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (2)$$

То есть суммы двух событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их произведения.

Заметим, что формула (1) является частным случаем формулы (2), так как для несовместных событий $P(A \cdot B) = 0$.

Задача 1. Имеется 36 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность того, что будет вынута или трефовая карта, или туз?

Решение. Пусть событие A — «вынута трефовая карта», событие B — «вынут туз». Тогда событие $A + B$ — «вынуты либо трефовая карта, либо туз», а событие $A \cdot B$ — «вынут трефовый туз». Ясно, что $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{36}$, $P(A \cdot B) = \frac{1}{36}$, поэтому по формуле (2)

$$P(A + B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

Если два события таковы, что вероятность любого из них не зависит от того, произошло или не произошло другое, то такие события считают независимыми.

Пусть одновременно подбрасывают две монеты. Событие A — «на первой монете выпал герб, а на второй или герб, или решка», событие B — «на второй монете выпал герб, а на первой или герб, или решка». События A и B таковы, что вероятность любого из них не зависит от того, произошло или не произошло другое, поэтому эти события независимы.

Однако сделанный выше вывод основан на интуиции. А определение желательно давать так, чтобы оно не зависило от интуитивных (или каких-либо ещё) соображений. Поэтому в теории вероятностей принято такое определение.

События A и B в рассматриваемом опыте называют **независимыми**, если справедливо равенство

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (3)$$

В таблице приведены все исходы рассматриваемого опыта.

исходы	монета 1	монета 2
1	герб	герб
2	герб	решка
3	решка	герб
4	решка	решка

Событию A благоприятствуют два исхода: 1-й и 2-й, событию B благоприятствуют два исхода: 1-й и 3-й, поэтому $P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Событию C — «и на первой, и на второй монете выпал герб»благоприятствует единственный исход: 1-й, поэтому $P(C) = \frac{1}{4}$. Так как $P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, то события A и B независимы по определению.

Заметим, что при решении практических задач редко проверяют равенство (3), а обычно пользуются интуитивными соображениями, основанными на опыте. Поэтому в практических задачах независимость событий заранее оговаривают.

Задача 2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком 0,6, а вторым — 0,5. Считая, что попадание в мишень каждого из стрелков является независимым событием (т. е. вероятность попадания в мишень каждым стрелком не зависит от попадания или непопадания в мишень другим стрелком), определим вероятность попадания в мишень:

а) обоими стрелками; б) хотя бы одним стрелком.

Решение. Пусть событие A — «мишень поражена первым стрелком», событие B — «мишень поражена вторым стрелком». Тогда событие $A \cdot B$ — «мишень поражена обоими стрелками», событие $A + B$ — «мишень поражена хотя бы одним стрелком».

Так как $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ и события A и B независимые, то по равенству (3)

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3.$$

Применяя формулу (2), получим

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8.$$

Следовательно, вероятность попадания в мишень обоими стрелками равна 0,3, а хотя бы одним стрелком — 0,8.

================

796. В опыте из колоды (36 карт) случайным образом извлекают карту. События A — «извлечён король», B — «извлечён валет», C — «извлечена трефовая карта», D — «извлечена бубновая карта». Какие из следующих событий являются несовместными: A и B; A и C; B и C; A и D?

797. Приведите примеры несовместных событий в опыте с бросанием игрального кубика.

798. В опыте из колоды (36 карт) случайным образом извлекают карту. Рассматриваются события A — «извлечён король» и B — «извлечён валет». Определите вероятность события $C = A + B$.

799. В опыте из колоды (36 карт) случайным образом извлекают карту. Рассматриваются события A — «извлечён король» и B — «извлечена бубновая карта». Определите вероятность событий: A, B, $A \cdot B$. Определите вероятность события D — «извлечены король или бубновая карта».

800. В опыте из тёмного мешка наудачу вынимают кость домино. Рассматриваются события A — «извлечена кость с суммой очков 7», B — «извлечена кость с суммой 5». Определите вероятности событий A, B. Используя найденные вероятности, вычислите вероятность события C — «извлечена кость с суммой или 7, или 5».

801. В опыте из тёмного мешка наудачу вынимают кость домино. Рассматриваются события A — «извлечена кость с суммой очков, кратной 2», B — «извлечена кость с суммой очков, кратной 3», C — «извлечена кость с суммой очков, кратной 6». Определите вероятности событий A, B, C. Используя найденные вероятности, вычислите вероятность события D — «извлечена кость с суммой очков, кратной или 2, или 3».

802. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком 0,7, а вторым — 0,8. Считая, что попадание в мишень каждого из стрелков является независимым событием, определите вероятность попадания в мишень:

а) обоими стрелками; б) хотя бы одним стрелком.

14.5. Частота случайных событий

Пусть в результате опыта может произойти событие A, имеющее вероятность $P(A) = p$, $0 < p < 1$. Повторим опыт n раз, и пусть при этом событие A произойдет m раз. Число $\frac{m}{n}$ называют **относительной частотой** события A.

Математики Ж. Бюффон и К. Пирсон провели многократные опыты с бросанием монеты. Их результаты приведены в таблице.

	Число бросаний	Число выпаданий герба	Относительная частота выпадания герба
Бюффон	4040	2048	0,5085
Пирсон	12000	6019	0,5046
Пирсон	24000	12012	0,5005

Как видно из таблицы, относительная частота выпадания герба, полученная в опытах Бюффона и Пирсона, мало отличается от вероятности выпадания герба в указанном эксперименте, равной 0,5.

Не всегда удается определить вероятность p события априори (от лат. *a priori* — независимо от опыта), как это имеет место с бросанием монеты или игральной кости. Но если возможно опыт повторить n раз, то при большом n относительная частота события $\frac{m}{n}$ может рассматриваться как приближенное значение вероятности ($\frac{m}{n} \approx p$) этого события.

При большом количестве опытов относительная частота события, как правило, мало отличается от вероятности этого события.

Эту закономерность называют **статистической устойчивостью относительных частот.**

Отметим, что, чем больше проводится опытов, тем реже встречается сколько-нибудь значительное отклонение относительной частоты от вероятности.

Замечание. Если относительную частоту события принять по определению за приближенное значение вероятности этого события, то получим так называемое статистическое определение вероятности.

Приведенное в п. 14.2 определение вероятности событий называют классическим определением вероятности.

Существует ещё и аксиоматическое определение вероятности, в котором определение вероятности задается перечислением её свойств. При аксиоматическом определении вероятность задаётся как функция $P(A)$, определенная на множестве M всех событий, определяемых данным опытом, которая (для опытов с конечным числом исходов) удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$ для любого события A из M;

2) $P(A) = 1$, если A — достоверное событие;

3) $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если события A и B несовместны.

Теорию, изучающую вероятность событий лишь для опытов с конечным числом исходов, называют **элементарной теорией вероятностей**.

Конечно, существуют и опыты с бесконечным числом возможных событий. Теорию, изучающую вероятность таких событий, называют **общей теорией вероятностей**.

В общей теории вероятностей свойство 3 понимается в расширенном смысле:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots .$$

Свойства 1–3 называют аксиомами Колмогорова теории вероятностей. Именно А.Н. Колмогоров впервые в 1933 г. дал аксиоматическое построение теории вероятностей.

=============

803. Проведите опыт с бросанием монеты 50 раз. Вычислите относительную частоту выпадания герба. Сравните свой результат с результатами других учащихся вашего класса.

804. Проведите опыт с бросанием игральной кости 60 раз. Вычислите относительную частоту каждого из событий: A — «выпало 6 очков»; В — «выпало чётное число очков».

805. Пятеро учащихся при бросании монеты 50 раз получили данные, приведённые в таблице:

Ученик	Число бросаний	Число выпаданий герба	Относительная частота выпадания герба
1	50	27	0,54
2	50	28	0,56
3	50	23	0,46
4	50	26	0,52
5	50	24	0,48

Вычислите относительную частоту выпадания герба во всех 250 опытах.

Дополнения к главе 5

1. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля

Справедливы следующие формулы:

$$(a + b)^1 = a + b, \qquad (1)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \qquad (3)$$

Покажем, что

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \qquad (4)$$

Действительно, применяя формулу (3) и перемножая многочлены, имеем:

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) (a + b) =$$
$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Рассматривая формулы (1) – (4), можно заметить, что при разложении $(a + b)^n$ в многочлен получается сумма членов a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, ..., ab^{n-1}, b^n с некоторыми коэффициентами. Для нахождения этих коэффициентов часто применяют **треугольник Паскаля.**

Он устроен так. В его нулевой строке стоит единица, в первой строке стоят две единицы, далее в каждой следующей строке по краям стоят единицы, а каждое из оставшихся $n - 1$ чисел n-й строки равно сумме двух чисел, записанных над ним в предыдущей строке.

Номер строки
0 — 1
1 — 1 1
2 — 1 2 1
3 — 1 3 3 1
4 — 1 4 6 4 1
5 — 1 5 10 10 5 1
6 — 1 6 15 20 15 6 1
... — ...

Используя треугольник Паскаля, получим, что

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5, \qquad (5)$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6. \qquad (6)$$

Конечно, используя треугольник Паскаля, можно найти разложение $(a + b)^n$ в многочлен для любого натурального n. Но этот процесс для больших n достаточно трудоёмок. Кроме того, надо обосновать правильность треугольника Паскаля. Поэтому приведём общую формулу.

Для любого натурального числа n справедлива формула, называемая **формулой бинома Ньютона:**

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n, \qquad (7)$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Слагаемые суммы в правой части называют членами разложения бинома Ньютона. Член a^n называют нулевым членом разложения бинома Ньютона, далее идут первый, второй и т. д. члены до n-го (равного b^n) включительно; k-й член бинома Ньютона имеет вид

$$C_n^k a^{n-k}b^k \ (k = 1, 2, ..., n - 1).$$

Числа C_n^k называют также **биномиальными коэффициентами**.

Можно доказать, что коэффициенты C_n^k действительно равны соответствующим числам n-й строки треугольника Паскаля.

Формулу (7) можно доказать комбинаторным способом. Рассмотрим сначала произведение:

$$(a + x_1)(a + x_2) \ldots (a + x_n). \tag{9}$$

Раскроем скобки в произведении (9):

$$\begin{aligned}(a + x_1)(a + x_2) \ldots (a + x_n) = a^n + a^{n-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + \\ + a^{n-2}(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) + \\ + a^{n-3}(x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) + \ldots + x_1x_2x_3 \ldots x_n.\end{aligned} \tag{10}$$

Заменив все x_m ($m = 1, 2, \ldots, n$) на b, получим

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n,$$

т. е. формулу (7).

В самом деле, количество слагаемых в первых скобках равенства (10) равно $n = C_n^1$ (каждое из них равно b). Слагаемые во вторых скобках есть всевозможные сочетания из n элементов x_1, x_2, ..., x_n по два, их количество равно C_n^2 (каждое из них равно b^2). Слагаемые в третьих скобках есть всевозможные сочетания из указанных элементов по три, их количество равно C_n^3 (каждое из них равно b^3) и т. д.

2. Исторические сведения

Изучение математических рукописей Древнего Египта и Вавилона показывает, что ещё в глубокой древности возникли некоторые приёмы приближённых вычислений. Под влиянием развития астрономии, мореплавания и техники методы приближённых вычислений совершенствовались.

Большие заслуги в развитии теории приближённых вычислений имеет российский академик Алексей Николаевич Крылов (1863 —1945), который писал: «Во всех справочниках, как русских, так и иностранных, рекомендуемые приёмы численных вычислений могут служить образцом, как эти вычисления делать не надо... Вычисление должно производиться с той степенью точности, которая необходима для практики, причём всякая неверная цифра составляет ошибку, а всякая лишняя цифра — половину ошибки».

Чтобы в приближённых вычислениях можно было из самой записи приближённого числа судить о степени его точности, А. Н. Крылов предложил следующее правило: «Приближённое число следует записать так, чтобы все цифры, кроме последней, были бы надёжными», т. е. верными.

А. Н. Крылов был не только видным математиком, но и выдающимся механиком-кораблестроителем, сделавшим ряд важнейших технических открытий.

В настоящее время приближённые вычисления используются для расчёта полётов космических аппаратов, в подготовке прогноза погоды и т. п. Эти расчёты ведутся с помощью ЭВМ.

В науку термин «статистика» введён в XVIII в. Однако статистический учёт вёлся намного раньше: проводились переписи населения в Древнем Китае, осуществлялось сравнение военного потенциала государств, вёлся учет имущества граждан в Древнем Риме и т. п. Первой опубликованной статистической информацией можно считать глиняные таблички Шумерского царства (III – II тысячелетия до н. э.).

Вначале под статистикой понимали описание экономического и политического состояния государства или его части. Например, к 1792 г. относится определение: «статистика описывает состояние государства в настоящее время или в некоторый известный момент в прошлом». Однако постепенно термин «статистика» стал использоваться более широко. По Наполеону Бонапарту, «статистика — это бюджет вещей». Тем самым статистические методы были признаны полезными не только для административного управления, но и для применения на уровне отдельного предприятия. Согласно формулировке 1833 г., «цель статистики заключается в представлении фактов в наиболее сжатой форме». Во 2-й половине XIX — начале XX веков сформировалась научная дисциплина — математическая статистика, являющаяся частью математики.

Наука статистика использует математический аппарат, который не изучают в школе. Заметим, что статистика не ограничивается целочисленными данными и даже только точными данными, поэтому так важно уметь выполнять приближенные вычисления и знать правила приближений. Методы статистики позволяют не только фиксировать уже имеющиеся данные, но и на их основе делать прогноз на будущее. Вот почему эта наука так важна, и ей уделяют должное внимание во все времена.

Статистика разрабатывает специальные методы исследования и обработки материалов — массовые статистические наблюдения, методы графических изображений и другие методы анализа статистических данных. В ней большое внимание уделяется доступности и наглядности информации как для специалистов, принимающих ответственные решения, так и для обычных граждан. Воздействие наглядно и доступно представленных статистических данных и выводов на людей так велико, что к статистике иногда прибегают в недобросовестной рекламе товаров и услуг («эти духи покупает каждая десятая женщина») и даже в политике, где с помощью статистики можно манипулировать общественным мнением. Не случайно от Марка Твена известно высказывание, приписываемое премьер-министру Великобритании времён королевы Виктории Б. Дизраэли: «Существуют три вида лжи: ложь, наглая ложь и статистика». Разумеется, здесь речь идёт о недобросовестном использовании статистики.

Комбинаторика возникла в XVI в. — в то время были очень распространены азартные игры, в процессе которых выяснялось, например, что некоторая сумма очков при бросании двух игральных костей выпадает чаще других, а также другие факты, знание которых могло способствовать выигрышу. Интерес к различным проблемам азартных игр и был первоначальным стимулом к развитию комбинаторики. Никколо Тарталья (ок. 1499 – 1557) одним из первых занялся подсчётом числа различных комбинаций при игре в кости. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Джеролано Кардано (1501 – 1576), Блеза Паскаля (1623 – 1662), Пьера Ферма (1601 – 1665), Якоба Бернулли (1654 – 1705), Готфрида Вильгельма Лейбница (1646 – 1716), Леонарда Эйлера (1707 – 1783).

В работах Б. Паскаля и П. Ферма, Я. Бернулли и других математиков XVII в. Были заложены основы новой математической теории — теории вероятностей. В XVIII в. и в начале XIX в. развитие теории вероятностей было продолжено в работах А. Муавра (1667 – 1754), П. Лапласа (1749 – 1841), К. Гаусса (1777 – 1855), С. Пуассона (1781 – 1840) и др.

Во второй половине XIX века выдающиеся результаты в теории вероятностей были получены русскими учеными П. Л. Чебышевым (1821 – 1894), А. А. Марковым (1856 – 1922) и другими. В работах П. Л. Чебышева был решён ряд важных задач и были разработаны новые методы их решения, что послужило фундаментом для дальнейшего развития теории вероятностей.

В XX в. фундаментальный вклад в развитие теории вероятностей внёс Андрей Николаевич Колмогоров (1903 – 1987). А. Н. Колмогоров был выдающимся математиком XX столетия, внёсшим большой вклад во многие разделы математики и её приложений. Много внимания уделял А. Н. Колмогоров проблемам школьного математического образования. Им была основана школа-интернат физико-математического профиля при МГУ для способных школьников всей страны. Теперь эта школа носит имя А. Н. Колмогорова.

В 1933 г. А. Н. Колмогоров впервые дал аксиоматическое помтроение теории вероятностей.