Задача с двумя целочисленными параметрами

А.В. Шевкин,
avshevkin@mail.ru

Рассмотрим задачу с двумя параметрами, принимающими целые значения. Она из сборника популярных авторов И.Н. Сергеева и В.С. Панферова[1].

1. Найдите все пары целых чисел a и b, для каждой из которых уравнение

$$\arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} - a\cdot 2^{\sin \pi a x} - \left|\arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + a\cdot 2^{\sin \pi a x}\right| = 2ab \qquad (1)$$

имеет не менее 10 различных корней.

Решение. Сначала отметим, что если для некоторой пары целых чисел a и b существует корень уравнения (1), то $a \neq 0$, $|a| \geq |x|$. При этих условиях выполняется двойное неравенство $-1 \leq \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \leq 1$. Рассмотрим два возможных случая для a.

1) Пусть $a > 0$, тогда верны неравенства: $a \geq |x|$, $0 \leq \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \leq 1$, $\arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \geq 0$ и выражение, стоящее под знаком модуля в уравнении (1), положительно. Перепишем уравнение (1) в виде:

$$-2a\cdot 2^{\sin \pi a x} = 2ab,$$

$$2^{\sin \pi a x} = -b. \qquad (2)$$

Так как $-1 \leq \sin \pi a x \leq 1$, то $2^{-1} \leq 2^{\sin \pi a x} \leq 2^1$ и из неравенства $0{,}5 \leq -b \leq 2$ следует, что целое число b может быть равным –2 или –1.

При $b = -2$ уравнение (2) равносильно уравнению:

$$2^{\sin \pi a x} = 2,$$

$$\sin \pi a x = 1. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет бесконечное множество решений: $x = \frac{1}{2a} + \frac{2n}{a}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ для каждого целого значения $a = 1, 2, 3, \ldots$ Но нас интересуют лишь такие значения a, для каждого из которых неравенство

$$a \geq \left|\frac{1}{2a} + \frac{2n}{a}\right| \qquad (4)$$

имеет не менее 10 целых решений n, тогда уравнения (1) имеет не менее 10 корней. Умножив неравенство (4) на положительное число $2a$, перепишем его в виде

$$2a^2 \geq |1 + 4n|,$$

$$-2a^2 \leq 1 + 4n \leq 2a^2,$$

$$-\frac{2a^2+1}{4} \leq n \leq \frac{2a^2-1}{4}. \qquad (5)$$

Нетрудно убедиться, что неравенство (5) имеет не менее 10 различных целых решений n лишь при $a \geq 4$. Следовательно, условиям задачи удовлетворяют пары целых чисел a и b, такие, что $a \geq 4$, $b = -2$.

При $b = -1$ уравнение (2) равносильно уравнениям:

$$2^{\sin \pi a x} = 1,$$

$$\sin \pi a x = 0. \qquad (6)$$

[1] ЕГЭ. Практикум по математике: подготовка к выполнению части С / И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. — М.: Издательство «Экзамен», 2012. — 126 [2] с. (Серия «ЕГЭ. Практикум»).

Уравнение (6) имеет бесконечное множество решений: $x = \frac{n}{a}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ для каждого целого значения $a = 1, 2, 3, \ldots$ Но нас интересуют лишь такие значения a, для каждого из которых неравенство

$$a \geq \left|\frac{n}{a}\right| \tag{7}$$

имеет не менее 10 целых решений n, тогда уравнение (1) имеет не менее 10 корней. Умножив неравенство (7) на положительное число a, перепишем его в виде

$$a^2 \geq |n|,$$
$$-a^2 \leq n \leq a^2. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что неравенство (8) имеет не менее 10 различных целых решений n лишь при $a \geq 3$. Следовательно, условиям задачи удовлетворяют пары целых чисел a и b, такие, что $a \geq 3$, $b = -1$.

2) Пусть теперь $a < 0$, тогда верны неравенства: $-a \geq |x|$, $-1 \leq \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \leq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \leq 0$ и выражение, стоящее под знаком модуля в уравнении (1), отрицательно. Перепишем уравнение (1) в виде:

$$2\arcsin\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = 2ab,$$
$$\arcsin\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = ab. \tag{9}$$

При любых целых a и b, таких, что $a < 0$ число ab равно 0 или -1. Уравнение (9) не может иметь не менее 10 корней x ни в одном из возможных случаев.

Ответ. $a = 4, 5, \ldots$ при $b = -2$; $a = 3, 4, \ldots$ при $b = -1$.