Задача из сборника Л.Д. Лаппо и М.А. Попова,
или Сколько месяцев в году содержат 30 дней?

А.В. Шевкин,
avshevkin@mail.ru

Начнём с вопроса из заголовка статьи.

Если зададим такой вопрос пятиклассникам, то чаще всего получим неправильный ответ: «4 месяца». А правильный ответ: «11 месяцев», так как все месяцы, кроме февраля, содержат 30 дней, а некоторые из них даже 31. Задачи на точное понимание написанного полезно давать уже в 5 классе. Не зря этот вопрос мы с И.Ф. Шарыгиным включили в книжку «Задачи на смекалку»[1].

Беда заключается в том, что похожие ошибки иногда совершают не только учителя, но и авторы пособий для учителей. Рассмотрим задачу из свежего сборника для подготовки к ЕГЭ-2018 Л.Д. Лаппо, М.А. Попова[2], которую мне прислал учитель математики Назаров М.Г. с недоумённым вопросом по поводу неверного ответа. Речь пойдёт о задаче 18 из варианта 21.

1. Найдите все значения параметра a, при которых область определения функции

$$y=\sqrt{a-x}\cdot\log_2(2x-a)\cdot\log_2 x \qquad (1)$$

содержит три или четыре целых числа.

Сначала отметим, что задание сформулировано не совсем удачно, так как достаточно было бы сказать «содержит три целых числа» или «содержит не меньше трёх целых чисел». Неточность формулировки говорит о том, что, возможно, авторы имели в виду «ровно три или ровно четыре целых числа». Тогда более точно задачу надо было бы формулировать так.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых область определения функции (1) содержит **ровно** 3 или **ровно** 4 целых числа.

Начнём с решения задачи **1**.

Решение. Область определения функции (1) состоит из всех решений системы неравенств:

---

[1] Эта книжка входит в учебно-методический комплект «Математика, 5-6» серии «МГУ–школе».

[2] ЕГЭ 2018. Математика. Профильный уровень. Эксперт в ЕГЭ / Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. — М.: Издательство «Экзамен», 2018. — 335 [1] с. Серия «Эксперт в ЕГЭ».

$$\begin{cases} a - x \geq 0, \\ 2x - a > 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

решениями которой являются все положительные числа x из полуинтервала

$$\frac{a}{2} < x \leq a. \qquad (2)$$

При этом $a > 0$, так как в противном случае или $\frac{a}{2} = a$ (при $a = 0$), или $a < \frac{a}{2}$ (при $a < 0$). В обоих случаях неравенство (2) не имеет решений.

На оси абсцисс будем откладывать значения a, на оси ординат — значения x. Тогда каждому значению a будет соответствовать полуинтервал значений x, удовлетворяющих неравенству (2).

Построим график функций $x = a$ и $x = \frac{a}{2}$ — первый сплошной линией, второй пунктирной. Горизонтальными линиями красного цвета изобразим точки $(a;\ x)$ координатной плоскости aOx, для которых выполняется двойное неравенство (2) и значение x целое (рис. 1).

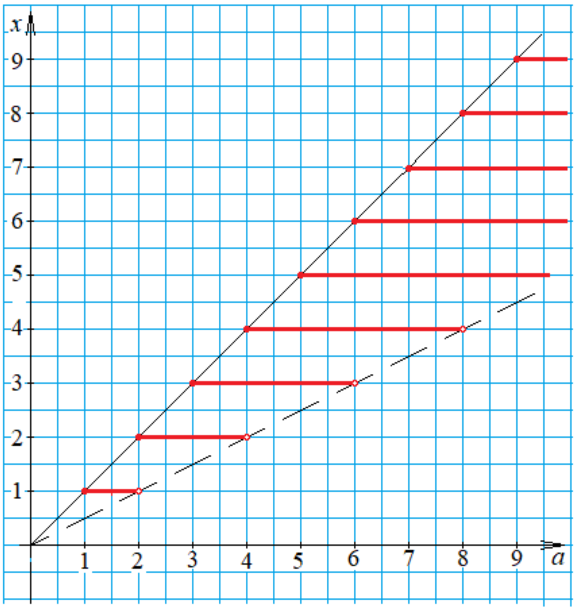

Рис. 1

Двойное неравенство (2):

- не имеет целых решений для каждого a, такого, что $0 < a < 1$;
- имеет единственное целое решение для каждого a, такого, что $1 \leq a < 3$;
- имеет ровно два целых решения для каждого a, такого, что $3 \leq a < 5$;
- имеет ровно три целых решения для каждого a, такого, что $5 \leq a < 7$;
- имеет ровно четыре целых решения для каждого a, такого, что $7 \leq a < 9$;
- имеет не меньше пяти целых решений для каждого a, такого, что $a > 9$.

Правильно понимаемый вопрос задачи **1** требует ответа $a \geq 5$. Ответ же к задаче **2** другой: $5 \leq a < 9$.

В сборнике приведён ответ [5; 9), значит, авторы имели в виду «ровно три или ровно четыре целых числа», то есть они решали не задачу **1**, а задачу **2**.

20.08.2017