ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ:
СХЕМА ГИПОТЕЗ, СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Формула полной вероятности и формулы Бейеса

Предположим, что событие A есть результат наступления хотя бы одного из событий H_1, H_2, ..., H_n попарно несовместных и образующих полную группу, но при этом неизвестно, какое именно из H_i наступит. В этом случае события H_1, H_2, ..., H_n называют гипотезами по отношению к A. Математическая модель, используемая для описания такой ситуации, называется ***схемой гипотез.***

1. Справедливо соотношение (называемое формулой ***полной вероятности***)

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_{H_k}(A).$$

Доказательство. Ввиду полноты группы гипотез имеем

$$E = H_1 + H_2 + \ldots + H_n.$$

Учитывая очевидное представление $A = A \cdot E$ и свойства операций сложения и умножения , получаем тогда

$$A = A \cdot E = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A.$$

События $H_k \cdot A,\ k = 1,2,\ldots n$ оказываются попарно несовместными (предположив противное, мы получили бы совместность гипотез), а поэтому

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k \cdot A).$$

Осталось применить к каждому слагаемому последней суммы теорему умножения.

В частном случае двух гипотез формула полной вероятности принимает вид

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A).$$

2. Пусть событие A ***наступило.*** Тогда вероятность того, что ***событие А оказалось следствием гипотезы именно*** H_k , определяется в виде (***формулы Бейеса***)

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k)P_{H_k}(A)}{P(A)}\ ,\ k=1,2,...,n,$$

где $P(A) \neq 0$ –полная вероятность.

Доказательство вытекает из равенства $A \cdot H_\kappa = H_\kappa \cdot A$, применив к которому теорему умножения, получим

$$P(A)P_A(H_k) = P(H_k)P_{H_k}(A), \quad k = 1,2,...n,$$

что и равносильно формулам Бейеса.

Задание 1.

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

A – батарейка забракована

H_1 – исправная

H_2 – неисправная

$\left[\begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}\right. \Rightarrow A$

$P(H_2) = 0,02$ $\quad P_{H_2}(A) = 0,99$

$P(H_1) = 1 - 0,02 = 0,98$ $\quad P_{H_1}(A) = 0,01$

$$P(A) = \sum_k P(H_k) \cdot P_{H_k}(A) = 0,98 \cdot 0,01 + 0,02 \cdot 0,99 = 0,0296$$

Задание 2

При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 87% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 88% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 15% пациентов, направленных на тестирование.

При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

Неопределенность ситуации: H_1 – болен, H_2 – не болен $\Rightarrow$ $P(H_1)=p$ (вероятность не указ.), $P(H_2)=1-p$

A – тест положителен $\Rightarrow$ $P_{H_1}(A)=0{,}87$; $P_{H_2}(A)=1-0{,}88=0{,}12$

$P(A)=0{,}15$ (дано)

$0{,}15=P(A)=p\cdot 0{,}87+(1-p)\cdot 0{,}12 \Rightarrow p=\frac{1}{23}$

Вопрос задачи: $P_A(H_1)=?$

Формула Бейеса: $P_A(H_1)=\dfrac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{23}\cdot 0{,}87}{0{,}15}\approx 0{,}25$

Задание 3

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

Событию A = „1 и 2 очка" предшествуют гипотезы:

H_1 – брошен первый кубик

H_2 – второй

$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$ | Требуется $P_A(H_1)$.

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}$$

Условные вероятности

$P_{H_1}(A) = P($„1 и 2" или „наоборот"$) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

$P_{H_2}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$P_A(H_1) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{2}\right)} = 0{,}1$$

Повторение опытов. Формула Бернулли

1. Пусть один и тот же опыт повторяется n раз, и при этом вероятность наступления события A в каждом таком опыте остается неизменной, равной некоторому p; пусть $q = 1 - p$. Математическая модель, используемая для описания такой последовательности опытов, называется ***схемой Бернулли.***

Обозначим через $P_n(k)$ вероятность того, что ***событие A появится ровно k раз в n опытах.*** В этом случае говорят также о k «успехах» в n опытах. Имеет место следующая ***формула Бернулли*****:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Доказательство. Фиксируем какие-либо k опытов. Обозначим через $A_{n,k}$ событие наступления события A ровно k раз (т.е. в этих в k опытах), происходящее совместно с ненастулением A (наступлением $\overline{A}$) $n-k$ раз. Очевидно, что

$$P(A_{n,k}) = \underbrace{p \cdot \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{n-k} = p^k \cdot q^{n-k}.$$

Событие $B_{n,k}$, состоящее в том, что A появится ровно k раз равносильно наступлению какого-либо из описанных (попарно несовместных) $A_{n,k}$, т.е. их сумме. Тогда

$$P_n(k) = P(B_{n,k}) = p^k \cdot q^{n-k} + p^k \cdot q^{n-k} + \ldots p^k \cdot q^{n-k},$$

причем слагаемых в этой сумме столько, сколько существует способов сформировать различные комбинации типа $A_{n,k}$. Это количество равно C_n^k – числу (неупорядоченных) выборок из n по k. Таким образом, слагаемое $p^k \cdot q^{n-k}$ повторяется C_n^k раз и мы приходим к (10.1).

2. ***Вероятность наступления события*** A ***в n опытах от*** k_1 ***до*** k_2 ***раз***, есть, очевидно

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Задание 1

Симметричную монету бросают 12 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 4 орла» меньше вероятности события «выпадет ровно 5 орлов»?

Схема Бернулли: событие A – „орёл" имеет в единичном опыте вероятность $p=p(A)=\frac{1}{2}$.

Ищем $\frac{P_{12}(4)}{P_{12}(5)}$, где $P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$.

$P_{12}(4)=\frac{12!}{4!\,8!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{12-4}$

$P_{12}(5)=\frac{12!}{5!\,7!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{12-5}$

$\frac{P_{12}(4)}{P_{12}(5)}=\frac{5!\,7!}{4!\,8!}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}=\frac{5}{8}=\frac{1}{1,6}$. Ответ: в 1,6 раза

Задание 2

Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

$P_5(k)=C_5^k\mathcal{P}^k(1-\mathcal{P})^{n-k}$

k – число поражённых мишеней (из 5)

$\mathcal{P}$ – вероятность поражения каждой мишени

$\frac{P_5(5)}{P_5(4)}=\frac{\mathcal{P}^5}{5\cdot\mathcal{P}^4(1-\mathcal{P})^1}=\frac{\mathcal{P}}{5(1-\mathcal{P})}$

$\mathcal{P}=P($„попал с 1-го раза" или „промах и попадание"$)=0,6+(1-0,6)\cdot 0,6=0,84$

$\Rightarrow\frac{P_5(5)}{P_5(4)}=\frac{0,84}{5\cdot 0,16}=1,05$