Тамбовское областное государственное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
«Институт повышения квалификации работников образования»

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников: рекомендации, содержание, оценка
(методические рекомендации)

Тамбов
2015

ББК
В

Рецензенты:
Доцент кафедры общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

И.В. Кривопалова

Кандидат технических наук, методист МАОУ лицей № 29 г. Тамбова

Н. А. Королева

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников: рекомендации, содержание, оценка. Авторы – составители: Демин Н. А., Иванова И. Ю, Нахман А. Д. - Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», 2015.

Предложенные методические рекомендации ко II этапу всероссийской олимпиады школьников по математике предназначены для методических комиссий II этапа олимпиад, членов жюри и учителей математики в помощь по подготовке и проведению олимпиады по математике. Пособие включает: пояснительную записку, основные подходы к составлению и оценке олимпиадных заданий, примерные тексты задач с решениями, литературу. Данные методические материалы рассмотрены на заседании секции «Математика и информатика» учебно-методического объединения в системе общего образования Тамбовской области и рекомендованы к использованию в практической деятельности.

Содержание

1. Введение
2. Порядок проведения муниципального этапа олимпиады
3. Общие принципы формирования комплектов заданий математических олимпиад
4. Общие критерии оценивания
5. Рекомендуемая тематика заданий муниципального этапа олимпиады 2014/2015 учебного года
6.Примеры олимпиадных заданий
6.1. Задания для 7 класса
6.2. Задания для 8 класса
6.3. Задания для 9 класса
6.4. Задания для 10 класса
6.5. Задания для 11 класса
7.Ответы и решения
7.1. 7 класс
7.2. 8 класс
7.3. 9 класс
7.4. 10 класс
7.5. 11 класс
8. Рекомендуемая литература для подготовки

Введение

Согласно введенному в 2013 году Порядку проведения всероссийской олимпиады школьников (далее - Олимпиада, приказ Минобрнауки России № 1252 от 18 ноября 2013), сохраняется общая четырехэтапная структура Олимпиады: школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы. Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам.

Настоящие методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь региональным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения муниципального этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы рассмотрены на заседании секции «Математика и информатика» учебно-методического объединения в системе общего образования Тамбовской области и рекомендованы к использованию в практической деятельности.

Порядок проведения муниципального этапа олимпиады

Олимпиада проводится для учащихся параллелей 7-11 классов. Согласно п. 38 Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников, участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады. Таким образом, участники школьного этапа олимпиады, выступавшие за более старшие классы по отношению к тем, в которых они проходят обучение, на муниципальном этапе также выполняют задания для более старших классов.

По возможности муниципальный этап Олимпиады должен проводиться без установления квот представительства от школ: это означает, что участниками олимпиады могут быть все победители и призеры школьного этапа Олимпиады. Кроме того, участниками олимпиады являются обучающиеся, ставшие победителями и призерами муниципального этапа олимпиады предыдущего года, при условии, что они продолжают обучение в общеобразовательных учебных заведениях. Следует еще раз подчеркнуть **недопустимость ограничения числа участников** Олимпиады от одного образовательного учреждения. Олимпиада является индивидуальным соревнованием одаренных детей, а не соревнованием школ, и в ней имеют право принимать участие все наиболее способные учащиеся.

Рекомендуемая продолжительность олимпиады для учащихся 7-11 классов - 4 часа.

Во время Олимпиады участники:

должны соблюдать установленный порядок проведения Олимпиады;

должны следовать указаниям организаторов;

не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории;

не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой.

При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета соответствующего этапа Олимпиады такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Олимпиада должна проходить как абсолютно объективное, беспристрастное и честное соревнование с высоким уровнем качества проверки работ участников и удобными условиями работы для участников. Для достижения этих целей:

а) Рекомендуется выполнение олимпиадных работ в тетрадях в клетку в силу того, что на математических олимпиадах предлагаются задачи на разрезание фигур, задачи на клетчатых досках, задачи, требующие построения рисунков и графиков.

б) Работы участников перед проверкой обязательно шифруются. Наиболее удобной формой кодирования является запись шифра (например, 9-01, 9-02, ...) на обложке тетради и на первой беловой странице с последующим снятием обложки и ее отдельным хранением до окончания проверки. Расшифровка работ осуществляется после составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призеров олимпиады.

в) В состав жюри олимпиады наряду с лучшими учителями необходимо включение преподавателей университетов, а также студентов и аспирантов, окончивших школу в данном муниципальном образовании и успешно выступавших на олимпиадах высокого уровня.

г) После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри Олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным. Жюри олимпиады не вправе «защищать честь мундира» и отказывать участнику олимпиады в исправлении оценки его работы в ситуации, когда реально требуется ее повышение. Изменение оценки согласуется с Председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

д) По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели. Участники муниципального этапа Олимпиады, набравшие наибольшее количество баллов в своей параллели, признаются победителями. Количество призеров муниципального этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором регионального этапа Олимпиады. Призерами муниципального этапа Олимпиады в пределах установленной квоты победителей и призеров признаются все участники муниципального этапа Олимпиады, следующие в итоговой таблице за победителями.

Общие принципы формирования комплектов заданий математических олимпиад

Задания муниципального этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Они должны носить творческий характер и проверять не степень усвоения участником олимпиады различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным по всем базовым учебникам по алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить большинству Участников возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады - определения наиболее способных Участников. Наиболее удачным является комплект заданий, при котором с первым заданием успешно справляются около 70% участников, со вторым - около 50%, с третьим -20%-30%, а с последними - лучшие из участников олимпиады.
4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательную, запоминающуюся форму. Формулировки задач должны быть четкими и понятными для участников.
5. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 5-6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются

задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

6. Желательно составление заданий олимпиады из новых задач, специально подготовленных методической комиссией для олимпиады. В случае, если задания олимпиады подбираются из печатных изданий и Интернет-ресурсов, необходимо, чтобы эти источники были неизвестны участникам Олимпиады. Олимпиада должна выявлять не энциклопедичность знаний Участника, а его математические способности.

Общие критерии оценивания

Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.

2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Рекомендуемая тематика заданий муниципального этапа олимпиады

2015/2016 учебного года

7 класс

1. Числовой ребус.
2. Задача на составление уравнений.
3. Делимость натуральных чисел. Признаки делимости.
4. Задача на разрезание фигур
5. Логическая задача.

8 класс

1. Числовой ребус или задача на нахождение набора чисел, обладающего заданными свойствами.
2. Построение множества точек на плоскости с указанными свойствами.
3. Признаки равенства треугольников.
4. Неравенство или задача на преобразования алгебраических выражений.
5. Логическая задача.

9 класс

1. Построение множества точек на плоскости с указанными свойствами или задача на четность.
2. Задача на составление уравнений.
3. Теорема Фалеса, подобие треугольников.
4. Неравенство или задача на преобразования алгебраических выражений.
5. Комбинаторная задача.

10 класс

1. Задача на свойства квадратичной функции.
2. Теория чисел (делимость, остатки, четность).
3. Планиметрическая задача.
4. Алгебра (неравенства, прогрессии).
5. Комбинаторная задача.

11 класс

1. Тригонометрия.
2. Задача про многочлены (теорема Безу) или квадратичные функции (теорема Виета).
3. Теория чисел (делимость, остатки, четность).
4. Стереометрия.
5. Комбинаторная задача.
6.

Примеры олимпиадных заданий

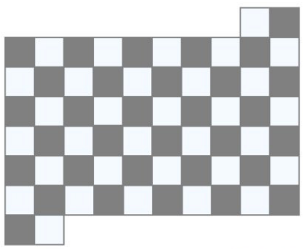
Задания для 7 класса

№1. Решите числовой ребус:

	Б	**У**	**Л**	**О**	**К**
+		**Б**	**Ы**	**Л**	**О**
	М	**Н**	**О**	**Г**	**О**

Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам.

№2. Разделите фигуру на две одинаковые части, и из полученных частей сложите шахматную доску.



№3. Даны 2007 чисел, каждое из которых равно 1 или -1. Можно ли разбить их на две группы так, чтобы суммы чисел, входящих в каждую группу, были бы равны?

№4. В турнире по футболу участвовало 7 команд, которые набрали 14; 13;9;8;7;4 и 3 очка. За победу присуждалось 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. Сколько матчей в турнире закончилось вничью?

№5. Петя опоздал в школу на 35 минут. Тогда он решил сбегать в киоск за мороженным. Но когда он вернулся, второй урок уже начался. он тут же побежал за мороженным вл второй раз и отсутствовал такое же время. Когда он вернулся, то оказалось, что он опять опоздал и до начала четвертого урока надо ждать 50 минут. За какое время можно сбегать из школы до киоска с мороженным и обратно, если каждый урок вместе с переменой после него длится 55 минут?

Задания для 8 класса

№1. Построить график уравнения $(x+3)(y-2)=0$

№2. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y + 4$.

№3. На стороне BC равностороннего треугольника ABC взята точка M, а на продолжении стороны AC за точку C - точка N, причем $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

№4. При каких целых n число $n^4 + 4$ является простым?

№5. В первой группе класса «А» первенства СССР по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются медали: золотые, серебряные и бронзовые. Сколькими способами они могут быть распределены?

Задания для 9 класса

№1. Построить график уравнения $y + \frac{|y|}{2} = \frac{x}{2} + |x|$.

№2. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $2x^2 – 6x +1 =0$.

(Указание: Площадь круга радиуса R находится по формуле: $S = \pi R^2$)

№3. Пусть AA' и CC' – две высоты остроугольного треугольника ABC. Доказать, что треугольники $A'BC'$ и ABC подобны с коэффициентом $\cos\angle B$.

№4. Двое ребят собрали 10 ромашек, 15 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы?

№5. На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начали забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежал со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен пришел на финиш на 16мин 40 с раньше второго и через 43 мин 20 с после того, как во второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше 100 м/мин. Сколько всего раз первый спортсмен обогнал второго на дистанции после старта?

Задания для 10 класса

№1. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

№2. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность. Параллельно его основанию AC проведена касательная к окружности, пересекающая боковые стороны в точках D и E. Найти радиус окружности, если $DE = 8$, $AC = 18$.

№3. Найти все такие четверки чисел, в которых первые три числа составляют арифметическую прогрессию, а три последних – геометрическую прогрессию, причем известно, что сумма второго и третьего из них равна 12, а сумма первого и четвертого равна 14.

№4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{4x-1}{x^2-2x+2}.$$

№5. Если между цифрами двузначного числа вписать нуль, то полученное трехзначное число будет в 9 раз больше исходного. Найдите это число.

Задания для 11 класса

№1. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

№2. Высота прямой призмы ABCA'B'C' равна 18. Основание призмы – треугольник ABC, площадь которого равна 12, AB = 5. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC' и плоскостью основания призмы.

№3. Для каждой пары чисел a и b ($a > 0$) найдите наименьшее значение выражения $f(3-f(4-5x))$, где $f(x) = a(x-2)^2 + b$.

№4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = \frac{4\sin x + a}{4a - 2\sin x}$ принимает все значения из отрезка $[0;1]$.

№5. Найти сумму всех четырехзначных натуральных чисел, каждое из которых дает остаток 2 при делении на 3 и остаток 3 при делении на 4.

Ответы и решения
7 класс

№1. Решите числовой ребус:

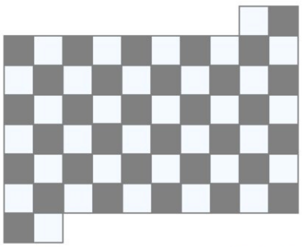
$$\begin{array}{cccccc} & \text{Б} & \text{У} & \text{Л} & \text{О} & \text{К} \\ + & & \text{Б} & \text{Ы} & \text{Л} & \text{О} \\ \hline & \text{М} & \text{Н} & \text{О} & \text{Г} & \text{О} \end{array}$$

Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам.

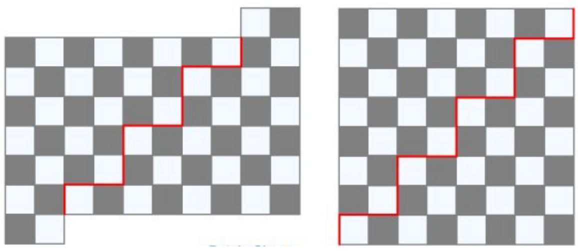
Ответ: 87130 + 8213 = 95343.

7 баллов – задание выполнено верно.

№2. Разделите фигуру на две одинаковые части, и из полученных частей сложите шахматную доску.



Ответ:



7 баллов – задание выполнено верно.

№3. Даны 2007 чисел, каждое из которых равно 1 или -1. Можно ли разбить их на две группы так, чтобы суммы чисел, входящих в каждую группу, были бы равны?

Решение:

Допустим, что такие две группы существуют. Тогда в одной группе будет нечетное число слагаемых, а в другой – четное. Заметим, что сумма чисел в одной группе будет нечетной, а в другой – четной. Получили противоречие.

Ответ: нет

7 баллов – задание выполнено верно.

1 балл – дан верный ответ без обоснования.

№4. В турнире по футболу участвовало 7 команд, которые набрали 14; 13;9;8;7;4 и 3 очка. За победу присуждалось 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. Сколько матчей в турнире закончилось вничью?

Решение:

Всего было сыграно $\frac{7\cdot 6}{2}$= 21 матчей. Если бы они все закончились победой команд, то сумма очков, набранных всеми командами, была бы равна 21 · 3 = 63. Но из условия задачи следует, что общая сумма набранных очков равна 58. Поскольку при каждой ничьей всего командам присуждается по одному очку, то из трех очков при ничьей теряется одно. Но всего потерянных очков в турнире будет 63-58=5. Значит, 5 матчей закончились вничью.

Ответ: 5.

7 баллов – задание выполнено верно.

3 балла – ход решения верный, но решение не доведено до конца или допущена вычислительная ошибка или описка.

1 балл – ответ дан без обоснования.

№5. Петя опоздал в школу на 35 минут. Тогда он решил сбегать в киоск за мороженным. Но когда он вернулся, второй урок уже начался. Он тут же побежал за мороженным во второй раз и отсутствовал такое же время. Когда он вернулся, то оказалось, что он опять опоздал и до начала четвертого урока надо ждать 50 минут. За какое время можно сбегать из школы до киоска с мороженным и обратно, если каждый урок вместе с переменой после него длится 55 минут?

Решение:

От начала уроков до второго твозвращения Пети в школу прошло 35+2*x* минут, где *x* – время, необходимое, чтобы сбегать за мороженным. За это время состоялось 2 урока с переменами и прошло еще 5 минут от третьего урока. Имеем: $35+2x = 2\cdot55+5$, откуда $2x = 80$ и $x = 40$.

Ответ: 40 минут.

7 баллов – задание выполнено верно.

3 балла – ход решения верный, но решение не доведено до конца или допущена вычислительная ошибка или описка.

1 балл – ответ дан без обоснования.

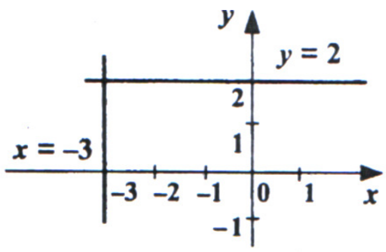
8 класс

№1. Построить график уравнения $(x+3)(y-2)=0$

Решение:

График состоит из двух прямых: x = -3; y = 2.

Ответ:



7 баллов – задание выполнено верно.

2 балла – построена одна из двух прямых.

№2. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y + 4$.

Решение:

Так как $xy – x – y - 4=0$, то $(x - 1)(y - 1) = 5$. Поскольку $5 = 5\cdot1 = 1\cdot5 = (-5)\cdot(-1) = (-1)\cdot(-5)$, то получим четыре системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x-1=5, \\ y-1=1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=5, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-1=-5, \\ y-1=-1, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-5. \end{cases}$

Откуда находим четыре пары (6;2), (2;6), (-4;0), (0;-4).

Ответ: (6;2), (2;6), (-4;0), (0;-4).

7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов – решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка или описка.

3 балла – ход решения верный, но решение не доведено до конца или допущена вычислительная ошибка или описка

2 балла – ответ найден подбором.

1 балл – ответ дан без обоснования.

№3. На стороне BC равностороннего треугольника ABC взята точка M, а на продолжении стороны AC за точку C - точка N, причем $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

Решение:

Через точку M проведем прямую, параллельную AC. Обозначим $\angle CAM = \alpha$. Через точку M проведем прямую, параллельную AC. Пусть она пересекает сторону AB в точке K. Тогда $\angle AMK = \angle MAN = \angle MNC = \alpha$, $\angle CMN = \angle ACM - \angle MNC = 60^{\circ} - \alpha = \angle MAK$, поэтому треугольники MCN и AKM равны по стороне (MN=AM) и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $CN = MK = BM$.

7 баллов – задание выполнено верно.

4 балла - решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.

1 балл - рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).

№4. При каких целых n число $n^4 + 4$ является простым?

Решение:

Разложим выражение $n^4 + 4$ на множители. Имеем $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2) \cdot (n^2 - 2n + 2)$.

Простым числом называется целое положительное число, большее единицы, не имеющее других делителей, кроме самого себя и единицы: 2; 3; 5; 7; 11; 13; …. Поэтому, если для какого-то целого n число $n^4 + 4$ является простым, то обязательно либо $n^2 + 2n + 2 = 1$, либо $n^2 - 2n + 2=1$. Если рассматривать эти равенства как уравнения относительно n, то из первого уравнения вытекает, что $n = -1$, а из второго – что $n = 1$. Проверкой убеждаемся, что при $n = \pm 1$ число $n^4 + 4$ равно 5 и, значит, является простым числом.

Ответ: $n=\pm 1$.

7 баллов – задание выполнено верно.

3 балла – решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка или описка.

№5. В первой группе класса «А» первенства СССР по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются медали: золотые, серебряные и бронзовые. Сколькими способами они могут быть распределены?

Решение:

Золотые медали может получить любая из 17 команд. Иными словами, здесь у нас 17 возможностей. Но если золотые медали уже получены какой-то командой, то остается лишь 16 претендентов на серебряные медали. Повторения здесь не может быть – одна и та же команда не может завоевать и золотые, и серебряные медали.

Значит, после вручения золотых медалей какой – то команде остается 16 возможностей получения серебряных медалей. Точно так же если уже вручены и золотые, и серебряные медали, то бронзовые медали может получить лишь одна из оставшихся 15 команд. Получаем, что медали могут быть распределены $17 \cdot 16 \cdot 15 =$ 4080 способами.

Ответ: 4080 способов.

7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов - решение в целом верное, однако, оно содержит одну логическую ошибку.

2 балла - найден верный ход решения, но решение не доведено до конца.

9 класс

№1. Построить график уравнения $y+\frac{|y|}{2}=\frac{x}{2}+|x|$.

Решение:

1) $\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0, \\ y+\frac{y}{2}=\frac{x}{2}+x \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0, \\ 2y+y=x+2x, \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0, \\ x=y. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x>0, y<0 \\ y-\frac{y}{2}=\frac{x}{2}+x \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, y<0, \\ y=3x. \end{cases}$

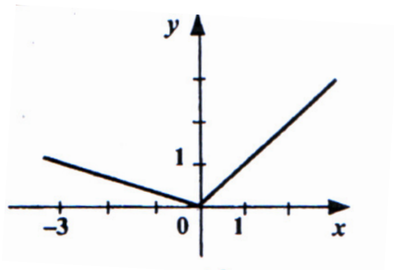
Случай 2) невозможен.

3) $\begin{cases} x<0, y<0, \\ y-\frac{y}{2}=\frac{x}{2}-x, \end{cases}$ $\begin{cases} x<0, y<0, \\ 2y-y=x-2x, \end{cases}$ $\begin{cases} x<0, y<0, \\ y=-x. \end{cases}$

Случай 3) невозможен.

4) $\begin{cases} x<0, y>0, \\ y+\frac{y}{2}=\frac{x}{2}-x, \end{cases}$ $\begin{cases} x<0, y>0, \\ 2y+y=x-2x, \end{cases}$ $\begin{cases} x<0, y>0, \\ y=-\frac{1}{3}x. \end{cases}$

Ответ:



7 баллов – задание выполнено верно.

3 балла – ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка или описка.

2 балла – ход решения верный, но решение не доведено до конца.

1 балл – ответ дан без обоснования.

№2. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $2x^2 – 6x +1 =0$.

(Указание: Площадь круга радиуса R находится по формуле: $S = \pi R^2$)

Решение:

Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2 – 6x +1 =0$. Тогда площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника с катетами x_1, x_2, равна

$$\pi R^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(x_1^2+x_2^2) = \frac{\pi}{4}((x_1^2+x_2^2)^2 - 2x_1x_2) = \frac{\pi}{4}(3^2-1) = 2\pi.$$

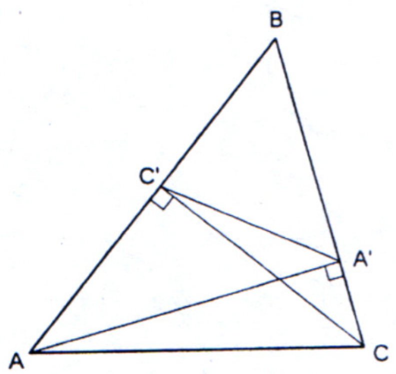
Ответ: 2π.

7 баллов – задание выполнено верно.

3 баллов – решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка или описка.

№3. Пусть AA' и CC' – две высоты остроугольного треугольника ABC. Доказать, что треугольники $A'BC'$ и ABC подобны с коэффициентом $\cos\angle B$.

Решение:



Запишем косинус угла B двумя способами:

$\cos\angle B = \frac{BA'}{BA}$ (из $\Delta ABA'$)

$\cos\angle B = \frac{BC'}{BC}$ (из $\Delta CBC'$).

Теперь рассмотрим треугольники $\Delta A'BC'$ и ΔABC. У них угол B общий,

а длины соответствующих сторон связаны соотношением $\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \cos\angle B$, следовательно, треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников, причем коэффициент подобия равен $\cos\angle B$.

7 баллов – задание выполнено верно.

4 балла - решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.

1 балл - рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).

№4. Двое ребят собрали 10 ромашек, 15 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы?

Решение:

Ясно, что ромашки можно разделить 11 способами – первый может не взять ни одной ромашки, взять одну ромашку, две ромашки, …, все 10 ромашек. Точно так же васильки можно разделить 16 способами, а незабудки – 15 способами. Так как цветы каждого вида можно делить независимо от цветов другого вида, тогда правилу произведения получаем $11 \cdot 16 \cdot 15 = 2640$ способов раздела цветов.

Ответ: 2640 способов.

7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов - решение в целом верное, однако, оно содержит одну логическую ошибку.

2 балла - найден верный ход решения, но решение не доведено до конца.

№5. На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начали забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежал со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен пришел на финиш на 16мин 40 с раньше второго и через 43 мин 20 с после того, как во второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше 100 м/мин. Сколько всего раз первый спортсмен обогнал второго на дистанции после старта?

Решение: Пусть x м/мин и y м/мин - скорости первого и второго спортсменов, тогда

$$\begin{cases} \frac{10000}{y} = \frac{10000}{x} + 16\frac{2}{3} \\ \frac{800}{x-y} = \frac{10000}{x} - 43\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{10000}{\frac{10000}{x}+\frac{50}{3}} \\ x - y = \frac{800}{\frac{10000}{x}-\frac{130}{3}} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{600}{\frac{600}{x}+1} + \frac{240}{\frac{3000}{x}-13} = \frac{600x}{600+x} + \frac{240x}{3000-13x} \Rightarrow (600+x)\cdot$$

$$(3000-13x) = 600(3000-13x) + 240(600+x) \Rightarrow 13x^2 - 2760x + 240\cdot$$

$$600 = 0 \Rightarrow x = \frac{1380 \pm 180}{13} > 100 \Rightarrow$$

$$x = 120, y = \frac{600}{\frac{600}{120}+1} = 100,$$

поэтому количество обгонов равно целой части

$$\left[\!\left[\frac{120-100}{400}\cdot\frac{10000}{120}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{50}{12}\right]\!\right] = 4.$$

Ответ: 4.

7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов – ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена вычислительная ошибка или описка.

3 балла – ход решения верный, но решение не доведено до конца.

1 балл – ответ дан без обоснования.

10 класс

№1. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

Решение:

Можно купить либо по экземпляру каждого романа, либо том, содержащий два романа и экземпляр третьего романа. По правилам суммы и произведения получаем $6 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 134$ способа.

Ответ: 134 способа.

7 баллов – задание выполнено верно.

3 балла – задание решено верно, но допущена арифметическая ошибка или описка.

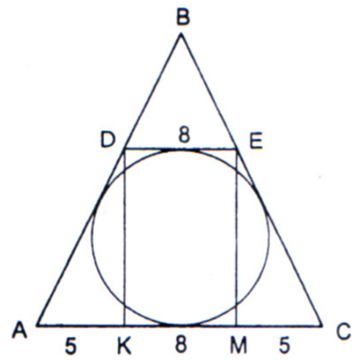
1 балл – ответ дан без обоснования.

№2. В равнобедренный треугольник *ABC* вписана окружность. Параллельно его основанию *AC* проведена касательная к окружности, пересекающая боковые стороны в точках *D* и *E*. Найти радиус окружности, если $DE = 8$, $AC = 18$.

Решение:

Опустим из точек *D* и *E* перпендикуляры на сторону AC – получим прямоугольник *DEMK,*

в котором $KM = DE = 8$.



Диаметр окружности равен перпендикуляру *DK*, для вычисления длины которого сначала надо найти длину отрезка *AD*.

Рассмотрим прямоугольные треугольники *ADK* и *CEM*. Они равны по катету ($DK = EM$) и острому углу ($\angle A = \angle C$, так как $\Delta\, ABC$ равнобедренный).

Из равенства треугольников следует равенство отрезков $AK = MC = 5$.

Так как в описанном около окружности четырехугольнике сумма длин противоположных сторон равны, то $AD + EC = DE + AC = 8+18 = 26$ $\Rightarrow AD = EC = \frac{26}{2} = 13$.

Диаметр окружности равен $DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, следовательно, радиус равен $\frac{12}{2} = 6$.

Ответ: 6.

7 баллов – задание выполнено верно.

4 балла - решение в целом верное, но не конца обоснованно.

1 балл - рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).

№3. Найти все такие четверки чисел, в которых первые три числа составляют арифметическую прогрессию, а три последних – геометрическую прогрессию, причем известно, что сумма второго и третьего из них равна 12, а сумма первого и четвертого равна 14.

Решение:

Пусть (a, b, c, d) искомая четверка чисел. Из условия задачи, используя свойства арифметической и геометрической прогрессий, получаем, что числа a, b, c, d удовлетворяют следующей системе уравнений $\begin{cases} b = \frac{a+c}{2}, \\ c^2 = bd, \\ b + c = 12, \\ a + d = 14. \end{cases}$

Складывая третье и четвертое уравнения, получаем $a + b + c + d = 26$. Из первого уравнения вытекает, что $a + c = 2b$. Подставляя это равенство в предыдущее, получим $3b + d = 26$ или $d = 26 - 3b$. Из третьего уравнения получаем $c = 12 - b$. Подставляя два последних равенства во второе уравнение системы, получим уравнение $(12 - b)^2 = b(26 - 3b)$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, легко убедиться, что это уравнение эквивалентно квадратному уравнению $2b^2 - 25b + 72 = 0$. Решая это уравнение, получим $b_1 = 4{,}5$; $b_2 = 8$. Из третьего, первого и четвертого уравнений системы последовательно находим $c_1 = 7{,}5$; $c_2 = 4$; $a_1 = 1{,}5$; $a_2 = 12$; $d_1 = 12{,}5$; $d_2 = 2$.

Ответ: (12; 8; 4; 2), (1,5; 4,5; 7,5; 12,5).

7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов – ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка или описка.

3 балла – ход решения верный, но решение не доведено до конца.

1 балл – ответ дан без обоснования.

№4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{4x-1}{x^2-2x+2}.$$

Решение:

Область определения функции: $D(y) = \mathbb{R}$. Рассмотрим $y = \frac{4x-1}{x^2-2x+2}$ как уравнение относительно переменной x с параметром y, переписав его в виде $yx^2 - 2(y+2)x + 2y + 1 = 0.$ (1)

Если y = 0, то уравнение (1) становится линейным. При этом x = 0,25. Пусть теперь y≠0. Уравнение (1) имеет решение только в том случае, если его дискриминант D неотрицателен. Найдем $\frac{D}{4} = (y+2)^2 - y(2y+1) = -y^2 + 3y + 4 \geq 0,$ то есть $y^2 - 3y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 4$. Таким образом, min y = -1, max y = 4. При этом $D = 0$ и $x = \frac{y+2}{y}$.

Если $y = -1$, то $x = -1$; если $y = 4$, то $x = 1{,}5$.

Ответ: min $y(x) = y(-1) = -1$; max $y(x) = y(1{,}5) = 4$.

7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов – с помощью верного рассуждения получены верные значения функции при указанных условиях задачи.

3 балла – ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка или описка.

2 балла – верно найдено наибольшее или наименьшее значение функции.

№5. Если между цифрами двузначного числа вписать нуль, то полученное трехзначное число будет в 9 раз больше исходного. Найдите это число.

Решение:

Пусть $\overline{xy} = 10x + y$ – двузначное число, где x – цифра десятков, y – единиц. Если между цифрами вписать нуль, то получим трехзначное число вида $\overline{x0y} = 100x + y$. Согласно условию получим уравнение $100x + y = 9(10x + y)$, или $5x = 4y$, откуда $y = 5$; $x = 4$ – единственная пара возможных чисел. Итак, искомое число 45, так как $405 = 9 \cdot 45$.

Ответ: 45.

7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов – решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка или описка.

1 балл – ответ дан без обоснования

11 класс

№1. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

Решение:

Можно купить либо по экземпляру каждого романа, либо том, содержащий два романа и экземпляр третьего романа. По правилам суммы и произведения получаем $6 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 134$ способами.

Ответ: 134 способа.

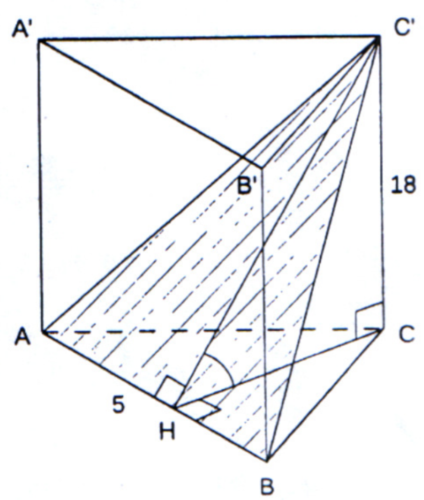
7 баллов – задание выполнено верно.

3 балла – задание решено верно, но допущена арифметическая ошибка или описка.

1 балл – ответ дан без обоснования.

№2. Высота прямой призмы ABCA'B'C' равна 18. Основание призмы – треугольник ABC, площадь которого равна 12, AB = 5. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC' и плоскостью основания призмы.

Решение:



Двугранный угол измеряется углом между перпендикулярами к ребру, восстановленными в обеих плоскостях из одной точки. В качестве основания перпендикуляра, восстановленного к ребру *AB* в плоскости *ABC'*, удобно взять основание высоты *C'H* треугольника *ABC'*.

Заметим, что прямая *CH* является проекцией наклонной *C'H* на плоскость *ABC*, поскольку ребро *CC'* перпендикулярно плоскости *ABC*.

Так как по построению наклонная *C'H* перпендикулярна отрезку *AB*, то и ее проекция *CH* тоже перпендикулярна этому отрезку (по теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, искомым углом является ∠*C'HC*. Тангенс этого угла найдем из прямоугольного треугольника *C'HC*.

Катет *CC'* = 18 по условию задачи. Второй катет *CH* является высотой треугольника *ABC*. С помощью формулы для площади треугольника получим

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH \Leftrightarrow 12=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot CH \Leftrightarrow CH=4{,}8$$

Следовательно, tg∠*C'HC* = $\frac{CC'}{CH}=\frac{18}{4,8}$=3,75.

Ответ: 3,75.

7 баллов – задание выполнено верно.

4 балла - решение в целом верное, но не конца обоснованно.

1 балл - рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).

№3. Для каждой пары чисел a и b ($a > 0$) найдите наименьшее значение выражения $f(3-f(4-5x))$, где $f(x) = a(x-2)^2 + b$.

Решение:

Наименьшее значение функция $f(x)$ достигает при $x = 2$, а ее область значений представляет собой луч $[b;\ +\infty)$. При этом, чем больше расстояние от x до числа 2 – тем больше значение $f(x)$.

Область значений функции 3-f(4-5x) представляет собой луч L = $(\infty; 3-b]$ (выражение 4-5x принимает в точности все действительные значения). Если $b \le 1$, то луч L содержит точку $x = 2$, если же $b > 1$, то ближайшая точка луча L к точке $x = 2$ – это точка $x = 3 - b$.

Ответ: b, если $b \le 1$; $a(b - 1)^2 + b$, если $b > 1$.

7 баллов – задание выполнено верно.

3 балла – ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка или описка.

2 балла – ход решения верный, но решение не доведено до конца.

1 балл – ответ дан без обоснования.

№4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = \frac{4\sin x + a}{4a - 2\sin x}$ принимает все значения из отрезка $[0; 1]$.

Решение:

Поскольку множество значений функции $\sin x$ совпадает с отрезком [-1;1], задачу можно переформулировать следующим образом: найти все значения параметра а, при каждом из которых для любого у $\in [0; 1]$ найдется такое t $\in$ [-1;1], что у = $\frac{4t+a}{4a-2t}$. Последнее равенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4t + a = y(4a - 2t) \\ 4a - 2t \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = a\frac{4y-1}{2(y+2)} \\ t \ne 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = a(2 - \frac{9}{2(y+2)}) \\ t \ne 2a \end{cases}$$

Заметим, что а=0 не удовлетворяет условию задачи, а при а≠0 система равносильна своему первому уравнению, так как $2 - \frac{9}{2(y+2)} \ne 2$. Рассмотрим функцию g(y) = $a(2 - \frac{9}{2(y+2)})$. При а≠0 она монотонна на отрезке $[0; 1]$ и переводит его в отрезок с концами g(0)= - $\frac{a}{4}$ и g(1) = $\frac{a}{2}$, который целиком содержится в отрезке [-1;1] лишь при $\begin{cases} \left|-\frac{a}{4}\right| \le 1 \\ \left|\frac{a}{2}\right| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow |a| \le 2.$

Ответ: $-2 \le a < 0, \quad 0 < a \le 2.$

7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов – с помощью верного рассуждения получено множество значений *x*, отличающегося от искомого конечным числом точек.

3 балла - с помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *x*.

1 балл – верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *x*.

№5. Найти сумму всех четырехзначных натуральных чисел, каждое из которых дает остаток 2 при делении на 3 и остаток 3 при делении на 4.

Решение:

Нетрудно показать, что числа, которые при делении на 3 дают остаток 2 образуют арифметическую прогрессию с разностью 3, а числа, которые при делении на 4 дают остаток 3, образуют арифметическую прогрессию с разностью 4. Числа, которые дают остаток 2 при делении на 3 и остаток 3 при делении на 4 образуют арифметическую прогрессию с разностью 12 (12 является наименьшим общим кратным чисел 3 и 4), причем 1007 является наименьшим таким числом, 9995 – наибольшим. Итак, нам нужно найти сумму арифметической прогрессии с первым членом 1007, разностью 12 и последним членом 9995. Всего членов такой прогрессии равно $\frac{9995-1007}{12} + 1 = 750$. Поэтому искомая сумма равна $\frac{(1007+9995)\cdot 750}{2} = 4125750$.

Ответ: 4125750.

7 баллов – задание выполнено верно.

3 балла – ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка или описка.

2 балла – ход решения верный, но решение не доведено до конца.

1 балл – ответ дан без обоснования.

Рекомендуемая литература для подготовки заданий муниципального этапа Всероссийской математической олимпиады

Журналы:

«Квант», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

АгахановН.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. - М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. - М.: Просвещение, 2008.

АгахановН.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. - М.: Просвещение, 2009.

АгахановН.Х., Подлипский О.К., РубановИ.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. - М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. - М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В.,Кукина Е.Г.,Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. - М.: МНИМО, 2011.

Андреева А.Н. ,Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51-1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). - М.: МЦНМО, 2013.

БабинскаяИ.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., ГорскаяЕ.С., ГуровицВ.М. (сост.). Московские математические регаты. - М.: МЦНМО, 2007.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. - Киров: Аса, 1994.

ГорбачевН.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). - М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы (5-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2012.

Демин Н. А., Иванова И. Ю, Нахман А. Д. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников: рекомендации, содержание, оценка. - Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», 2014.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное).

— М., МЦНМО, 2014.

Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). — М., МЦНМО, 2014.

КозловаЕ. Г.. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное).— М., МЦНМО, 2013.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. - М., ГИФМЛ, 1958—576с.

РаскинаИ. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. - М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурсы:

http: //www.probl ems .ru/

http://allmath.ru/

http://www.den-za-dnem.ru/page.php?article=97

http://aimakarov.cat.ru/school/school.html