А.В. Шевкин

Математика – это интересно!

Заметки о составлении и решении задач
с младшими школьниками

Москва 2013

Настоящий сборник составлен из заметок школьного учителя математики об опыте составления задач олимпиадного характера для обучения учащихся 5-6 классов. В ней показан пример восприятия школьниками творческого отношения своего учителя не только к решению таких задач, но и к их составлению.

Сборник содержит более 70 задач с решениями. Он окажется полезным школьникам, а также их взрослым наставникам.

Вместо предисловия

Идея составить этот сборник пришла накануне празднования десятилетия моей любимой физматшколы № 2007 г. Москвы. Здесь я работаю уже седьмой год, а последние два года, как мне кажется, исключительно плодотворно в смысле составления задач и организации работы с ними учащихся младших классов. А секрет прост: эти два года я работаю с учащимися пятых, потом шестых, а теперь уже седьмых классов, которые оказались исключительно отзывчивыми на мои предложения.

Отмечу, что нас сблизила и подружила головоломка пентамино, поиском решений которой — с большим увлечением и с большим успехом! — мы занялись в сентябре 2011 г. А в апреле 2012 г. пятиклассники Кулямин Антон и Тертичный Дмитрий сделали стендовый доклад о работе над нашим проектом на «Ярмарке идей на Юго-Западе». Выступление ребят было успешным, они получили дипломы I степени (их описание процедуры защиты прилагается). Этим нашим «баталиям» посвящена заметка

С осени 2011 г. ребята «втянулись» в процесс решения еженедельных «пятёрочек» задач. Они решали подобранные мною или специально для них составленные задачи, иногда удивляя меня неожиданными способами решения, причём «здесь и сейчас» — в моём присутствии. Если в 5 классе ребята решали задачи, то в начале 6 класса у них проснулся интерес к составлению задач. Эта работа отражена в заметках:

Составление задач иногда выводило нас за круг уже изученного на уроках математики. Так случилось со сложными задачами на совместную работу из заметки 1, с некоторыми другими задачами.

Очень рад, что я не пожалел времени на запись решений моих учащихся и на обдумывание составленных ими задач. Иногда это подталкивало к составлению новых задач. Так из одной задачи Чуйкова Сергея получились две «пятёрочки» задач, решениям которых посвящены две заметки:

Следующая заметка интересна описанием однотипных подходов к решению различных по сюжету задач:

Ранее я уже публиковал статьи для учителей, посвящённые плодотворной идее решения некоторых задач, она формулируется так: «Не бойтесь вводить лишние буквы!». В «пятёрочках» задач для 6 класса было много задач на эту идею, что привело к появлению ещё двух заметок. В заметку 7 добавлены задачи для старшеклассников, чтобы показать перспективность применения упомянутой идеи:

Особо надо сказать о задаче, которую принёс мне Юнусов Тимур. Это была задача на вычисление вероятности довольно сложного события. Поначалу у меня даже не было идеи, с какого боку приняться за решение задачи, а Тимур хотел знать, как решать задачи такого типа. Пришлось сочинять подготовительные задачи, разбирать их с учащимися — эффект превзошёл самые смелые мои ожидания: двигаясь по цепочке подготовительных задач, Тимур сам решил свою задачу! Так появилась заметка

Последняя заметка

посвящена несложным задачам. Она составлена в конце 2012/2013 учебного года и, как видно из названия, вызвана к жизни вопросами, возникающими у школьников в связи с введением электронного журнала.

В заключение выражаю благодарность моим учащимся за отзывчивость, учителям и администрации школы за благосклонное отношение к моим увлечениям, а моей жене — за удивительное терпение.

А.В. Шевкин
20.09.2013 г.

Десятилетию
ФМШ № 2007
посвящается.

1. О поиске решений головоломки пентамино с пятиклассниками

Имеются плоские фигуры домино и тримино, составленные из двух и трёх равных квадратов так, что каждый квадрат имеет общую сторону хотя бы с одним из остальных квадратов (рис. 1). В книжке [1] описан приём, с помощью которого можно убедиться, что из одной фигуры домино можно получить только две фигуры тримино, из них — только пять фигур тетрамино (рис. 2), а из них — только 12 фигур пентамино (рис. 3)

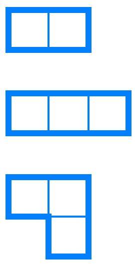

Рис. 1

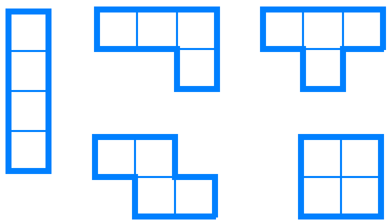

Рис. 2

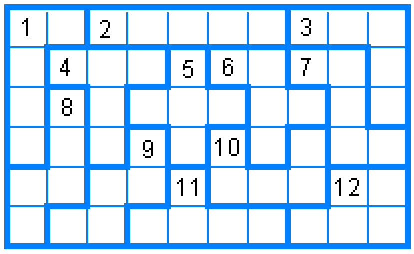

Рис. 3

Примерно в 1983 г. набор фигур пентамино мне подарил ученик школы № 679 г. Москвы Игорь Пак (теперь он профессор математики в США). На крышке этого набора было изображено одно решение головоломки, суть которой заключается в следующем. Двенадцатью фигурами пентамино надо покрыть прямоугольник 6×10, не накладывая фигуры друг на друга и используя каждую фигуру только 1 раз. Из книги С. Голомба [2] известно, что эта головоломка имеет 2339 решений.

Каждой из 12 фигур пентамино на рисунке 3 присвоим свой номер — слева направо и сверху вниз (номер фигуры пишем в первой клетке фигуры при этом движении). Полученный набор номеров фигур будем называть шифром решения (номера фигур в шифре пишем через пробел). Наше первое решение имеет шифр 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12.

Каждому решению головоломки соответствует единственный шифр. Однако иногда одному шифру соответствует несколько решений. В таких случаях к шифру будем добавлять в скобках (2), (3), ... Это будет второе, третье и т. д. решение с тем же шифром.

Решения считаются различными, если при наложении прямоугольников 6×10 фигуры с одинаковыми номерами невозможно совместить друг с другом. Чтобы избежать повторов решений, полученных осевой симметрией прямоугольника 6×10 относительно своих осей симметрии, договоримся, что из четырёх возможных симметричных решений будем брать в каталог то решение, у которого номер фигуры, стоящей в левом верхнем углу, наименьший.

Решения головоломки удобно хранить в компьютере в виде Word-файлов с рисунком. Каждому файлу присваиваем имя – шифр решения, тогда в папке, где хранятся все решения, эти файлы упорядочиваются автоматически. Если появляется новое решение, то достаточно нарисовать его по описанному выше правилу, записать шифр решения и заглянуть в каталог решений. Если в нём нет решения с таким шифром, то найдено действительно новое решение головоломки. Если в каталоге уже имеется решение с таким же шифром, то надо открыть файл и сравнить решения, так как не исключено, что найденное решение отличается от уже имеющегося. Все известные на данный момент решения (1614 на 20.09.2013) выложены на страничке http://shevkin.ru/?action=Page&ID=821 (боковое меню сайта www.shevkin.ru).

За долгие годы преподавания математики каждому своему новому классу я показывал эту головоломку, практически всегда находились энтузиасты, которых увлекал поиск её новых решений, но этот интерес быстро затухал. Однако коллекция решений понемногу росла, в ней сохранялась информация о тех, кто нашёл хотя бы одно решение.

В 2011/2012 учебном году в ФМШ № 2007 у меня училось 28 пятиклассников. В конце сентября я рассказал им о головоломке. К этому моменту в каталоге было 275 решений. Учащиеся включились в поиск и к февралю 2012 г. одиннадцать из них нашли хотя бы по одному новому решению. Это Макарский М. (1 решение), Прихно М. (1), Сидоренко И. (3), Галанина М. (3), Иванов А. (5), Нестеров Д. (5), Никишкина А. (6), Григорьев Д. (7), Ахмедова Е. (9). А Тертичный Д. и Кулямин А. стали рекордсменами с результатами 70 и 140 решений соответственно. На мою долю выпала нелёгкая работа рисования решений и обновление коллекции решений на приведённой выше страничке в Интернете. Кроме того, я старался не отставать от своих учащихся в поиске новых решений.

Мною придуман алгоритм ручного перебора всех решений, который слишком громоздок и труднореализуем на практике. На его основе можно было бы сделать программу для решения задачи с помощью компьютера и проверить результат С. Голомба, но программа сразу же «убила» бы наши поиски. Когда-нибудь эту задачу мои ученики решат с учителем информатики, а пока мы с интересом разглядываем каждое новое решение, пытаясь с помощью симметрий и перекладывания небольшого числа фигур получить из него другие решения – был случай, когда из одного решения удалось получить 32 решения (см. задачу **4**).

Чем же интересна эта головоломка с точки зрения учителя математики? Попытаюсь ответить. Работа с ней развивает способности учащихся мысленно манипулировать с фигурами пентамино, предвидеть результат размещения фигуры в том или ином положении в том или ином месте, выстраивать стратегию решения задачи. Это опыт рисования симметричных фигур, использования имеющегося каталога для установления новизны найденного решения, опыт решения задачи с заранее не заданным алгоритмом.

Так как найти новое решение довольно трудно, то из каждого найденного решения надо стараться получить несколько новых решений, с помощью перекладывания фигур. Это могут быть фигуры, составляющие симметричную фигуру (рис. 4) – их можно поменять местами. Фигуры, которые можно сложить разными способами из одних и тех же фигур пентамино (рис. 5), пары фигур, составляющие равные фигуры (рис. 6).

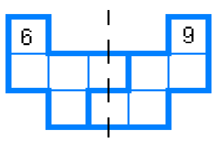

Рис. 4

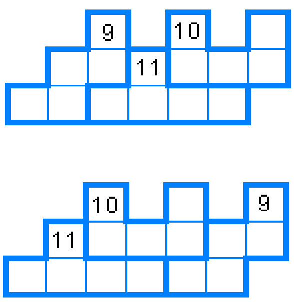

Рис. 5

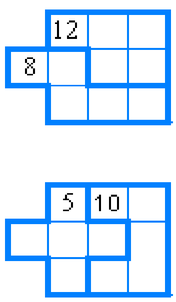

Рис. 6

Возьмём для примера первое решение (рис. 3) и получим новые решения, пользуясь тем, что фигуры 5 и 6 образуют фигуру, симметричную относительно прямой. Если их поменять местами, то получится новое решение 1 2 3 4 6 5 7 8 9 10 11 12. Если в этом решении поменять местами фигуры 4 и 6, то получится новое решение 1 2 3 6 4 5 7 8 9 10 11 12. Оказывается, для каждого из них можно иначе разместить фигуры 9, 10 и 11 (рис. 5). Мы получили уже шесть решений. Но и это ещё не всё. Для каждого из них можно получить ещё одно решение, пользуясь тем, что фигуры 4, 5, 6, 9, 10, 11 образуют фигуру, имеющую ось симметрии. На рисунке 7 изображено одно из таких решений. А в полученных решениях можно переставить фигуры 6 и 9 или фигуры 6 и 8 (рис. 7) ...

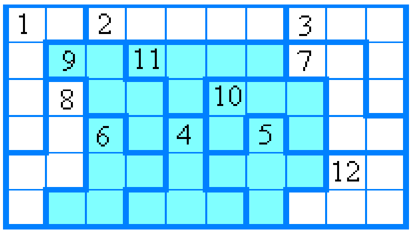

Рис. 7

Очевидно, что вся эта работа воспитывает и тренирует терпение, внимание, наблюдательность — качества, необходимые всем, кто изучает математику, а полезная для развития работа воспринимается учащимися как игра. В процессе поиска новых решений головоломки приходится решать и математические задачи, а некоторые задачи (см. задачу 1) на разрезание фигур на клетчатой бумаге сводятся к проверке возможности выложить данную фигуру одинаковыми фигурами пентамино. Это позволяет не только находить все решения задачи, но и доказывать, что других решений нет, опираясь на конечный перебор фигур пентамино. Рассмотрим несколько задач, связанных с фигурами пентамино.

1. Разрежьте фигуру (рис. 8) на три равные части, если резать разрешается только по сторонам квадратов. Укажите все решения.

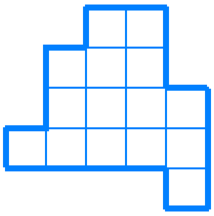

Рис. 8

Ответ. Два возможных решения изображены на рисунке 9. Других решений нет.

Данная фигура составлена из 15 равных квадратов, следовательно, разрезав её по сторонам квадратов на три равные части, получим одинаковые фигуры пентамино. Проверкой всех 12-ти фигур пентамино убеждаемся, что это могут быть лишь фигуры 7 и 12.

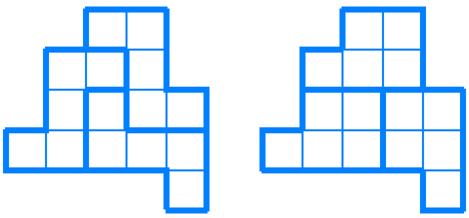

Рис. 9

2. Прямоугольник 6×10 нужно замостить 12-ю различными фигурами пентамино. На рисунке 8 изображено решение головоломки пентамино. Сколько новых решений головоломки, не считая данного, можно получить при условии, что разрешается перекладывать только фигуры, выделенные цветом?

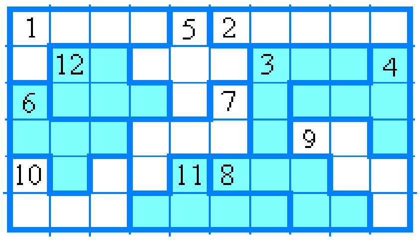

Рис. 10

Ответ. Можно получить 7 новых решений.

Заметим, что пары фигур 6 и 12, 11 и 8, 3 и 4 образуют фигуры, симметричные относительно прямой (на рисунке 11 оси симметрии показаны пунктиром). В каждой паре фигуры можно поменять местами. Поменяем местами фигуры 6 и 12, получим два различных решения, считая и данное. В каждом из них поменяем местами фигуры 3 и 4. Число решений удвоится, получим 4 решения. В каждом из четырёх решений поменяем местами фигуры 11 и 8, получим 8 решений. Из них все, кроме данного, новые. Других решений при перекладке тех же фигур получить нельзя, так как ни одну из фигур пентамино невозможно совместить с другой фигурой.

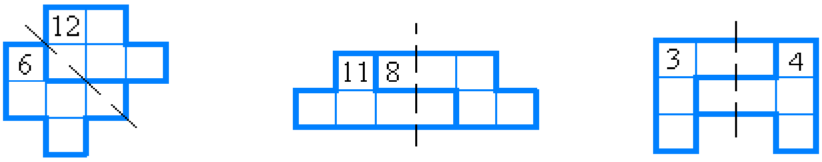

Рис. 11

3. На рисунке 12 изображено решение головоломки пентамино. Оно интересно тем, что ровно по 6 фигур пентамино уложилось в каждой половинке прямоугольника 6×10. Сколько новых решений головоломки, не считая данного, вы можете получить при условии, что фигуры пентамино нельзя перемещать внутри прямоугольников 6×5, но эти прямоугольники можно любым способом прикладывать друг к другу большими сторонами (как на рисунке 12)?

Замечание. Решения считаются различными, если при наложении прямоугольников 6×10 фигуры с одинаковыми номерами невозможно совместить друг с другом. На рисунке 13 показано то же решение, что и на рисунке 12.

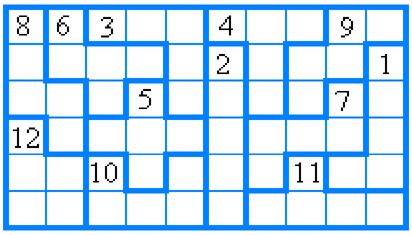

Рис. 12

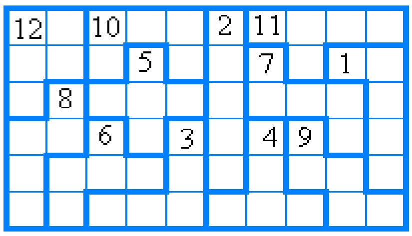

Рис. 13

Ответ. Можно получить 7 новых решений.

Первый прямоугольник 6×5 можно расположить так, чтобы в его левом верхнем углу находилась любая из фигур: 8, 3, 12 или 10, четырьмя способами. Аналогично четырьмя способами можно расположить второй прямоугольник 6×5. Каждому положению первого прямоугольника соответствует 4 положения второго, то есть имеется $4 \times 4 = 16$ способов приложить прямоугольники друг к другу большей стороной. Но у каждого из этих 16 решений имеется симметричное «решение» с неправильной нумерацией фигур. Так, например, решению с рисунка 12 найдётся симметричное «решение» (рис. 13). Поэтому описанным в условии задачи способом можно получить только 7 новых решений, не считая данного.

4. На рисунке 14 изображено одно из решений головоломки пентамино. Сколько новых решений головоломки, не считая данного, вы можете получить, если использовать только замену фигуры, образованной несколькими фигурами пентамино, на симметричную ей фигуру, составленную из тех же фигур?

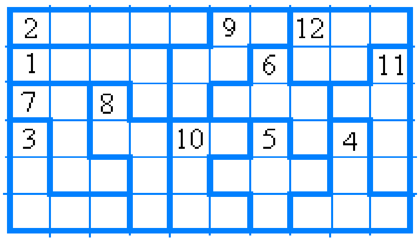

Рис. 14

Ответ. Можно получить 31 новое решение.

Заметим, что на рисунке 14 имеются фигуры, имеющие одну ось симметрии. Это фигуры, составленные из фигур пентамино: 1) 5 и 6; 2) 3, 7 и 8; 3) 4, 5, 6, 9, 10, 11 и 12. А прямоугольник, составленный из фигур 1; 3, 7 и 8, имеет две оси симметрии. Выполнив симметрию любой из этих групп фигур относительно её оси симметрии, мы удвоим число решений. Следовательно, всего описанным способом можно получить $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, из них 31 новое решение, не считая данного.

После того, как мы с учащимися увлеклись поиском решений головоломки и получили много решений, П.В.Чулков — завуч ФМШ № 2007, курирующий математику, спросил, а может быть, учащиеся смогут представить работу в виде доклада? Результаты-то интересные, учащиеся активно работают над этим проектом. Мы подали заявку на «Ярмарку идей на Юго-Западе». Пришлось выполнить некоторые формальности: описать гипотезу и прочие вещи, недоступные младшим школьникам. Составили текст выступления, подготовили каталог решений. На наше счастье оказалось, что папа Димы Тертичного художник-оформитель с золотыми руками. Он сделал стенд.

Скажем несколько слов об оформлении работы, так как, возможно, наш опыт окажется кому-то полезным. Вот основные пункты, которые требовалось отразить на стенде.

1. Название. Поиск решений головоломки С. Голомба «Пентамино 6х10».

2. Авторы: Антон Кулямин и Дмитрий Тертичный (учащиеся 5 Б класса, ФМШ № 2007).

Научные руководители: к.п.н. А.В. Шевкин, Е.Ф. Шершнев (преподаватели ФМШ № 2007)

3. Благодарим:

- родителей — за помощь в выборе интересного направление обучения, за помощь в подготовке к докладу и поддержку;
- учителей и школу — за возможность интересно учиться;
- участников проекта и одноклассников — за помощь в пополнении коллекции решений головоломки и сочувствие к нашим поискам.

4. Цель исследования

Первый этап (2011/2012 учебный год):

- получить возможно большее количество решений ручным способом,
- разработать приёмы поиска решений, научиться систематизации решений,
- подготовиться к составлению компьютерной программы для проверки результата С. Голомба.

Второй этап (2012/2013 учебный год):

- составить компьютерную программу и с её помощью получить полный набор решений головоломки, проверить результат С. Голомба,
- составить итоговый отчёт.

5. Гипотеза проекта

Ручным способом можно получить довольно большое число решений, но по мере расширения списка решений поступление новых решений должно замедлиться, а для точного ответа на вопрос о числе решений потребуется составить компьютерную программу, так как хаотический поиск, даже дополненный специальными приёмами, не является полным перебором всех решений.

6. Основные результаты исследования

Дневник исследования, график поступления новых решений. На первом этапе исследования (2011/2012 учебный год) мы вели поиск решений, его результаты представлены на стенде дневником исследования (распечатка нашей странички в Интернете, её адрес: http://www.shevkin.ru/?action=Page&ID=821).

По данным дневника мы построили график зависимости числа решений от времени. На графике есть резкий пик на 15-й неделе, соответствующий зимним каникулам. График подтверждает гипотезу исследования об уменьшении числа новых решений, поступающих в каждую неделю. Этот эффект объясняется тем, что многие решения, которые мы теперь находим, не являются новыми.

Вклад каждого участника. К апрелю 2012 г. 14 учащихся 5 А и 5 Б классов нашли хотя бы по одному новому решению. Это Кулямин А. (170 решений), Тертичный Д. (82), Иванов А. (46), Ахмедова Е. (9), Григорьев Д. (7), Иващенко А. (7), Нестеров Д. (7), Галанина М. (6), Никишкина А. (6), Сидоренко И. (4), Макарский М. (3), Чуйков С. (2), Николаева А. (1), Прихно М. (1).

7. Итоги исследования

Общими усилиями участников проекта с 26.09.2011 по 07.04.2012 добавлено 992 решения, всего решений стало 1267 (1265 из них уже размещены на сайте).

В ходе выполнения работы её участники научились определять, является ли найденное ими решение новым, пользуясь коллекцией решений. При этом иногда им приходится выполнять симметричное преобразование рисунка найденного решения. Большинство участников проекта освоили способы получения новых решений из одного найденного с помощь. Симметрий и перекладок фигур. Поиску решений также помогает работа со списком всех решений.

Однако ручным перебором получить все решения, подтвердить или опровергнуть результат С. Голомба невозможно, так как ручной поиск решения не является полным перебором всех решений головоломки.

На первом этапе мы убедились, что обойтись без второго этапа исследования (составления компьютерной программы) для проверки результата С. Голомба невозможно.

О том, как проходила защита проекта ребята написали текст, который с сокращенным вариантом статьи опубликовал журнал «Математика».

К 20 сентября 2013 г. мы продвинулись дальше. Появились новые участники проекта: Шерифф Н. (14), Клеймёнов (6), выпускница школы Никитина П. (2), Панкрашкин И.Б. (1), моя внучка Шевкина П. (2). Тертичный Д. нашёл новые решения в Интернете (6).

Используемая литература

[1] Задачи на смекалку: учеб. пособие для 5–6 кл. общеобразоват. учреждений/ И.Ф. Шарыгин, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 95 с.

[2] С. Голомб. Полимино. Перевод с английского В. Фирсова. Под редакцией и с предисловием И. Яглома. – М.: Мир, 1975 г. – 208 с.

Дополнение. Как мы защищали проект

Мы приехали 7 апреля 2012 г. в РУДН. Пока собирались участники, в фойе выступали дети из разных школ. Они пели и танцевали.

В 14 часов, когда все собрались, вышли организаторы и поздравили участников с тем, что они прошли дистанционный тур и получили возможность представить свои проекты публике и экспертам. Пожелали всем удачного выступления.

Все участники прошли к своим стендам. Мы разложили около нашего стенда доклады, аннотации, головоломки и стали ждать экспертов.

Все участники волновались, хотели, чтобы эксперты подошли именно к ним, но экспертов на всех не хватало, и нам пришлось немного подождать, понаблюдать защиту других докладов.

На защиту проекта не допустили ни наших руководителей, ни родителей. Нам предстояло на один день стать «лицом школы». Это огромная ответственность, и мы не имели права подвести родной физмат и любимого учителя.

Сил и уверенности нам прибавляло то, что наш проект стал для нас по-настоящему интересным. Казалось бы, чем может надолго увлечь обычная головоломка «пентамино»? Собрал один, второй прямоугольник, а потом надоело. Это если ты один ищешь решения.

Мы же вместе с учителем математики Александром Владимировичем устроили целое соревнование: кто больше найдет решений головоломки. Сначала ребята легко находили очередные варианты, но со временем стало понятно, что новое решение с каждым разом дается все труднее. Особо нетерпеливые стали поговаривать о том, чтобы найти или написать программу, которая бы сама «перебрала» все варианты. Так, из веселой игры зародилась идея для нашего исследовательского проекта.

Но вот к нам первой подошла женщина-эксперт. Мы представили свой проект. Она задавала вопросы о систематизации решений. Спрашивала, в какой стадии находится исследование. Ей понравился наш проект, она даже сказала, что приклеила бы два стикера за интересный проект, но нельзя.

Второй эксперт был очень строгий. Когда он слушал защиты других проектов, то критиковал их: «Я это и без вас знаю!», задавал участникам конкурса вопросы, на которые они не знали, что ответить. Когда критик оказался у нашего стенда, он «расцвел». Сказал: «Это новизна, это по-настоящему идея» и задержался у нашего стенда надолго. Внимательно выслушал нас, взял головоломку и начал искать решения. Хоть новых решений не нашел, но нашел симметрию и ушел очень довольный, прихватив визитку и доклад.

Третьим экспертом была опять женщина. После того, как мы все рассказали, она сказала, что решала эту головоломку в детстве. Она задала несколько вопросов о симметриях и о систематизации.

Четвертый эксперт подошел к нашему стенду около 16.20 (это было не обязательно, т.к. для положительной оценки работы достаточно было трёх оценок экспертов, но, видимо, его чем-то привлек наш проект). Молодой критик очень внимательно слушал, интересовался деталями, способом шифрования решений, задавал много вопросов, был у стенда до 17.05. Ему наш проект понравился.

Во время нашего доклада к стенду подходили ребята из других школ. Они внимательно слушали о головоломке, и, похоже, тоже заинтересовались ею.

В свободное время мы тоже смотрели другие проекты. Нам понравился проект на тему «История Отечественной войны 1812 года в задачах по математике».

Кулямин А., Тертичный Д.