Ох уж эти банковские задачи из ЕГЭ…

Шевкин А.В., ФМШ № 2007, г. Москва

В 2015 году произошли изменения в содержании ЕГЭ по математике, в частности, появились задачи 17, требующие не столько много математики, сколько умения вести длительные аккуратные вычисления. Знакомая учительница прислала мне задачу из подготовительной работы к ЕГЭ с просьбой предложить способ объяснения решений такого рода задач учащимся. Вот эта задача.

1. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1 го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года (последних 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 798,75 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования?

Прежде чем приступить к её решению, полезно рассмотреть задачу попроще и разобраться, как же здесь надо производить вычисления. Сформулируем и решим новую задачу.

2. 15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в сумме 6 млн. рублей. Условия возврата кредита те же, что и в задаче **1**. Определим суммы платежей за первые три и последние три месяца.

Решение. Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга 6 млн. руб. уменьшается на одну и ту же величину. Так как она уменьшается до нуля за 6 месяцев, то за каждый месяц она уменьшается на 1 (здесь и далее все денежные суммы выражены в млн. руб.). Суммы долга на 15-е число записаны в первом столбце таблицы.

1-го числа следующего месяца эти суммы увеличиваются на 1 %, то есть в 1,01 раза. (см. второй столбик таблицы). Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы сумма из второго столбика уменьшилась до суммы из первого столбика следующей строки. В первый месяц надо уменьшить сумму долга с 6,06 до 5, то есть надо заплатить

6,06 – 5 = 1,06, во второй месяц надо заплатить 5,05 – 4 = 1,05…, в шестой — 1,01 – 0 = 1,01 (см. третий столбик таблицы).

	6	6,06	
1)	5	5,05	1,06
2)	4	4,04	1,05
3)	3	3,03	1,04
4)	2	2,02	1,03
5)	1	1,01	1,02
6)	0		1,01

За первые три месяца надо заплатить 1,06 + 1,05 + 1,04 = 3,15, за последние три месяца надо заплатить 1,03 + 1,02 + 1,01 = 3,06.

Сформулируем задачу, обратную задаче **2** и похожую на задачу **1**.

3. 15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1 го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение трёх последних месяцев кредитования нужно вернуть банку 3,06 млн. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первых трёх месяцев кредитования?

Решение. Пусть кредит взят в сумме x млн. рублей (далее все суммы указаны в млн. рублей). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину, Она уменьшается до нуля за 6 месяца, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на $\frac{1}{6}x$. Суммы долга на 15-е число записаны в первом столбце таблицы. 1-го числа следующего месяца эти суммы увеличиваются на 1 %, то есть в 1,01 раза. (см. второй столбик таблицы). Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы сумма из второго столбика уменьшилась до суммы из первого столбика следующей строки (см. третий столбик таблицы).

	x	$1{,}01x$	
1)	$\frac{5}{6}x$	$\frac{1{,}01\cdot 5}{6}x$	$1{,}01x - \frac{5}{6}x = \frac{1{,}06}{6}x$
2)	$\frac{4}{6}x$	$\frac{1{,}01\cdot 4}{6}x$	$\frac{1{,}01\cdot 5}{6}x - \frac{4}{6}x = \frac{1{,}05}{6}x$
3)	$\frac{3}{6}x$	$\frac{1{,}01\cdot 3}{6}x$	$\frac{1{,}04}{6}x$
4)	$\frac{2}{6}x$	$\frac{1{,}01\cdot 2}{6}x$	$\frac{1{,}03}{6}x$
5)	$\frac{1}{6}x$	$\frac{1{,}01\cdot 1}{6}x$	$\frac{1{,}02}{6}x$
6)	0		$\frac{1{,}01}{6}x$

По условию задачи составим уравнение:

$$\frac{1{,}03}{6}x + \frac{1{,}02}{6}x + \frac{1{,}01}{6}x = 3{,}06$$

и найдём его единственный корень $x = 6$.

Теперь вычислим сумму платежей за первые три месяца при $x = 6$:

$$\frac{1{,}06}{6}x + \frac{1{,}05}{6}x + \frac{1{,}04}{6}x = 3{,}15.$$

Итак, в первые три месяца предстоит выплатить банку 3,15 млн. рублей.

Как видим, мы получили уже известные нам из задачи **2** данные.

Теперь рассмотрим **решение** задачи **1**.

Пусть кредит взят в сумме x тыс. рублей (далее все суммы указаны в тыс. рублей). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину, Она уменьшается до нуля за 24 месяца, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на $\frac{1}{24}x$. Суммы долга на 15-е число записаны в первом столбце таблицы.

1-го числа следующего месяца эти суммы увеличиваются на 1 %, то есть в 1,01 раза. (см. второй столбик таблицы). Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы сумма из второго столбика уменьшилась до суммы из первого столбика следующей строки (см. третий столбик таблицы).

	x	$1{,}01x$	
1)	$\frac{23}{24}x$	$\frac{23{,}23}{24}x$	$1{,}01x - \frac{23}{24}x = \frac{1{,}24}{24}x$
2)	$\frac{22}{24}x$	$\frac{22{,}22}{24}x$	$\frac{23{,}23}{24}x - \frac{22}{24}x = \frac{1{,}23}{24}x$
3)	$\frac{21}{24}x$	$\frac{21{,}21}{24}x$	$\frac{1{,}22}{24}x$
…			
12)	$\frac{12}{24}x$	$\frac{12{,}12}{24}x$	$\frac{1{,}13}{24}x$
13)	$\frac{11}{24}x$	$\frac{11{,}11}{24}x$	$\frac{1{,}12}{24}x$
…			
23)	$\frac{1}{24}x$	$\frac{1{,}01}{24}x$	$\frac{1{,}02}{24}x$
24)	0		$\frac{1{,}01}{24}x$

По условию задачи составим уравнение:

$$\frac{1{,}12}{24}x + \frac{1{,}11}{24}x + \ldots + \frac{1{,}01}{24}x = 798{,}75$$

и найдём его единственный корень $x = 1500$.

Теперь вычислим сумму платежей за первые 12 месяцев при $x = 1500$:

$$\frac{1{,}24}{24}x + \frac{1{,}23}{24}x + \ldots + \frac{1{,}13}{24}x = 888{,}75.$$

Итак, в первые 12 месяцев предстоит выплатить банку 888,75 тыс. рублей.

Рассмотрим ещё один вариант задачи о кредите, который взят из сборника для подготовки к ЕГЭ.

4. 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1 го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить за весь срок кредитования?

Решение. Пусть кредит взят в сумме x рублей (далее все суммы указаны в рублях). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 5 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на $\frac{1}{5}x$. Далее решение аналогично предыдущим решениям, для краткости рассмотрим сразу таблицу.

	x	$1{,}01x$	
1)	$\frac{4}{5}x$	$\frac{4{,}04}{5}x$	$1{,}01x - \frac{4}{5}x = \frac{1{,}05}{5}x$

2)	$\frac{3}{5}x$	$\frac{3,03}{5}x$	$\frac{4,04}{5}x - \frac{3}{5}x = \frac{1,04}{5}x$
3)	$\frac{2}{5}x$	$\frac{2,02}{5}x$	$\frac{1,03}{5}x$
4)	$\frac{1}{5}x$	$\frac{1,01}{5}x$	$\frac{1,02}{5}x$
5)	0		$\frac{1,01}{5}x$

Общая сумма денег выплаченных банку равна:

$$\frac{1,05}{5}x + \frac{1,04}{5}x + \frac{1,03}{5}x + \frac{1,02}{5}x + \frac{1,01}{5}x = 1,03x,$$

что составляет 103 % от суммы кредита. То есть за весь срок кредитования нужно выплатить банку 103 % от суммы кредита.

Замечание. Ответ к этой задаче в сборнике дан с ошибкой: 3 %. Он является ответом на совсем другой вопрос: Под сколько процентов от суммы кредита банк выдаёт кредит на 5 месяцев на перечисленных условиях?

Рассмотрим ещё один тип задач из упомянутого сборника.

5. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 690200 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5 %), затем Алексей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

Решение. Пусть кредит взят в сумме a = 6902000 рублей (далее все суммы указаны в рублях). Через год сумма долга увеличится на 12,5 %, то есть в $1,125 = \frac{9}{8}$ раза. Затем Алексей переведёт банку x рублей, к 31 декабря 2015 его долг составит $\frac{9}{8}a - x$. Далее заполняем в таблице два столбца: долг на 31 декабря текущего года и остаток долга на конец того же года:

1)	$\frac{9}{8}a$	$\frac{9}{8}a - x$
2)	$\frac{9}{8}\left(\frac{9}{8}a - x\right)$	$\frac{9}{8}\left(\frac{9}{8}a - x\right) - x = \frac{9^2}{8^2}a - \frac{17}{8}x$
3)	$\frac{9}{8}\left(\frac{9^2}{8^2}a - \frac{17}{8}x\right)$	$\frac{9}{8}\left(\frac{9^2}{8^2}a - \frac{17}{8}x\right) - x = \frac{9^3}{8^3}a - \frac{217}{8^2}x$
4)	$\frac{9}{8}\left(\frac{9^3}{8^3}a - \frac{217}{8^2}x\right)$	$\frac{9}{8}\left(\frac{9^3}{8^3}a - \frac{217}{8^2}x\right) - x = \frac{9^4}{8^4}a - \frac{2465}{8^3}x$

Так как остаток долга равен нулю после четвертой выплаты суммы x, то остаётся решить уравнение, заменив в нём a на 6902000:

$$\frac{9^4 \cdot 6902000}{8^4} - \frac{2465}{8^3}x = 0.$$

Оно имеет единственный корень x = 2296350. То есть сумма x должна быть равна 2296350 рублей.

Мы разобрали не все типы "банковских" задач, думается, что разобранных пяти задач достаточно, чтобы учащиеся могли с пониманием подойти и к решению остальных.