Некоторые вопросы подготовки школьников к ЕГЭ и к поступлению в вуз

Шевкин Александр Владимирович,
Заслуженный учитель РФ, к.п.н.,
стаж работы в школе 44 года,
один из авторов учебников
математики серии «МГУ-школе»,
С.М.Никольский и др., Просвещение, 1999-…
avshevkin@mail.ru www.shevkin.ru

Вступление

С введением ЕГЭ школьники всё меньше хотят получать математическое образование и всё больше хотят научиться решать типовые задачи из сборников для подготовки к ЕГЭ. В результате очень часто они оказываются не готовы к продолжению образования в вузе, так как в процессе тренинга на ограниченном наборе типовых подготовительных задач теряют умения работать с теоретическим учебным текстом, понимать и воспроизводить доказательства. Поговорим о задачах из ЕГЭ и ближайших окрестностей.

Иррациональные уравнения: «метода танка» или …

Танки грязи не боятся!

Рассмотрим два способа решения уравнения

$$8x + 1 + 4x\sqrt{2(8x^2 + 1)} + (4x + 1)\sqrt{16x^2 + 8x + 3} = 0. \qquad (1)$$

Решение. *I способ*. Перепишем уравнение (1) в виде

$$8x + 1 + 4x\sqrt{16x^2 + 2} = -(4x + 1)\sqrt{16x^2 + 8x + 3}. \qquad (2)$$

Теперь применим «метод танка»: не боясь долгих вычислений и преобразований (см. эпиграф), возведём уравнение (2) в квадрат.

1. Иррациональные уравнения

Получим его уравнение-следствие:

$$64x^2 + 16x + 1 + (64x^2 + 8x)\sqrt{16x^2 + 2} + 16x^2(16x^2 + 2) = \\ = (16x^2 + 8x + 1)(16x^2 + 8x + 3), \qquad (3)$$

имеющее все корни уравнения (2) и, возможно, посторонние корни. В уравнении (3) перенесём все слагаемые, не связанные с корнем в правую часть, получим равносильное ему уравнение:

$$(64x^2 + 8x)\sqrt{16x^2 + 2} = 256x^3 + 32x^2 + 16x + 2, \mid :2$$

$$(32x^2 + 4x)\sqrt{16x^2 + 2} = 128x^3 + 16x^2 + 8x + 1,$$

$$4x(8x + 1)\sqrt{16x^2 + 2} = 16x^2(8x + 1) + (8x + 1). \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет очевидный корень $-\frac{1}{8}$.

Пусть $x \neq -\frac{1}{8}$. Разделим уравнение (4) на не равную нулю функцию $8x + 1$, получим уравнение

$$4x\sqrt{16x^2 + 2} = 16x^2 + 1,$$

Возведём это уравнение в квадрат. Получится его уравнение-следствие, равносильное уравнению (4) на множестве всех x, таких, что $x \neq -\frac{1}{8}$.

$$256x^4 + 32x^2 = 256x^4 + 32x^2 + 1,$$

которое не имеет корней. Проверка показывает, что число $-\frac{1}{8}$ является корнем уравнения (1).

1. Иррациональные уравнения

II способ. Теперь обратим внимание на то, что подкоренные выражения в уравнении (1) связаны с выражениями 4*x* и 4*x* + 1, встречающимися в записи этого уравнения. Перепишем уравнение (1) в виде:

$$4x + 4x\sqrt{(4x)^2 + 2} + 4x + 1 + (4x + 1)\sqrt{(4x + 1)^2 + 2} = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 2} = t\left(1 + \sqrt{t^2 + 2}\right),$$

она определена на множестве ***R***, является нечётной и возрастающей. Уравнение можно переписать в виде

$$f(t_1) = -f(t_2),$$

где $t_1 = 4x$, $t_2 = 4x + 1$.

1. Иррациональные уравнения

Из нечётности функции $f\ (t)$ следует, что $-f\ (t_2) = f\ (-t_2)$, т. е. $f\ (t_1) = f\ (-t_2)$, а из возрастания функции $f\ (t)$ следует, что $t_1 = -\ t_2$. Другими словами, исходное уравнение равносильно уравнению

$$4x = -(4x + 1),$$

имеющему единственный корень $-\frac{1}{8}$.

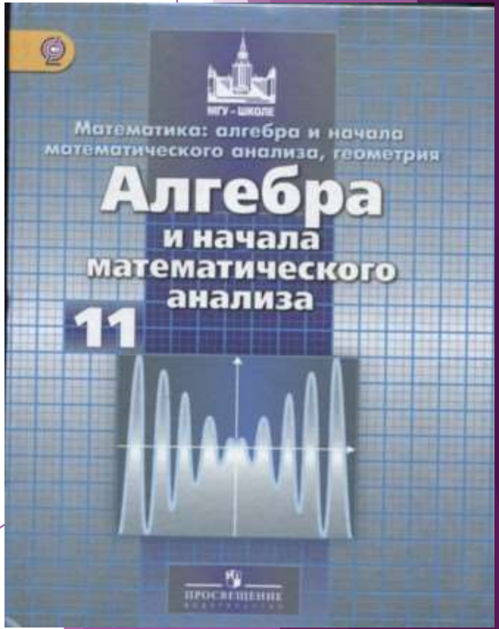
Ответ. $-\frac{1}{8}$.

1. Иррациональные уравнения

«Метод танка» надо применять исключительно аккуратно, освоив же применение замены неизвестного, свойств функций, можно получить заметный выигрыш во времени при работе с такими уравнениями.

Подробнее см. п.п. 13.1-13.5 из учебника «Алгебра и начала математического анализа, 11 класс» (С. М. Никольский и др.).

Рассмотрим ещё один пример.



1. Иррациональные уравнения

Решите уравнение:

$$8x\sqrt{1-x^2}\left(1-x\sqrt{1-x^2}\right)=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2. \qquad (8)$$

Решение. *I способ*. Перепишем уравнение (8) в виде

$$8x\sqrt{1-x^2}-8x^2(1-x^2)=x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2,$$

$$6x\sqrt{1-x^2}=8x^2(1-x^2)+1.$$

Возведём это уравнение в квадрат, после преобразований получим:

$$64x^8-128x^6+84x^4-20x^2+1=0.$$

Выполнив замену неизвестного *y* = $6x^2$, понизим степень полученного уравнения:

1. Иррациональные уравнения

$$64y^4 - 128y^3 + 84y^2 - 20y - 1 = 0. \qquad (9)$$

Теорема о корне многочлена с целыми коэффициентами позволила бы найти хотя бы один рациональный корень уравнения (9) при условии, что он существует. А его, как мы увидим позже, нет. Это как раз тот случай, когда «метод танка» бессилен.

1. Иррациональные уравнения

II способ. Перепишем уравнение (8) в виде

$$6x\sqrt{1-x^2} = 8x^2(1-x^2)+1. \qquad (10)$$

Правая часть уравнения (10), равносильного уравнению (8), положительная, так как $1-x^2 \geq 0$, поэтому для x справедливы неравенства: $0 < x \leq 1$.

Введя новое неизвестное $t = x\sqrt{1-x^2}$, перепишем уравнение (10) в виде:

$$8t^2 - 6t + 1 = 0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) имеет корни: $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = \frac{1}{4}$.

1. Иррациональные уравнения

Множество всех корней уравнения (8) есть объединение множеств корней уравнений

1) $x\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}$ и 2) $x\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{4}$.

Условию $0 < x \leq 1$ удовлетворяют единственный корень $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ уравнения 1) и два корня $x_2=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ и $x_3=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ уравнения 2).

Упростим запись чисел x_2 и x_3:

$$\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{4\pm2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3\pm2\sqrt{3}+1}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}.$$

1. Иррациональные уравнения

Числа x_1, x_2 и x_3 являются корнями уравнения (8) и других корней оно не имеет.

III способ. Выполним тригонометрическую замену неизвестного в уравнении (8). Пусть $x = \sin t$, как было показано выше, $0 < x \leq 1$, поэтому можно считать, что $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < 2t \leq \pi$. Тогда $\sqrt{1-x^2} = \cos t$.

Перепишем уравнение (8) в виде

$$6\sin t\cos t = 2(2\sin t\cos t)^2 + 1. \qquad (12)$$

Пусть $y = 2\sin t\cos t = \sin 2t$, перепишем уравнение (12) в виде

$$3y = 2y^2 + 1. \qquad (13)$$

1. Иррациональные уравнения

Уравнение (13) имеет два корня $y_1 = 1$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. Множество всех корней уравнения (12) есть объединение множеств корней уравнений

1) $\sin 2t = 1$ и 2) $\sin 2t = \frac{1}{2}$.

Условию $0 < 2t \leq \pi$ удовлетворяют единственный корень $t_1 = \frac{\pi}{4}$ уравнения 1) и два корня $t_2 = \frac{\pi}{12}$ и $t_3 = \frac{5\pi}{12}$ уравнения 2). Тогда $x_1 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \sin\frac{\pi}{12} == \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $x_3 = \sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. **Ответ.** $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Метод интервалов для непрерывных функций

Решите неравенство:

$$\frac{3^{\sqrt{9-x^2}}(x-1)}{(x+2)(x+1)} \leq 0. \qquad (1)$$

Решение. Область существования функции $f(x) = \dfrac{3^{\sqrt{9-x^2}}(x-1)}{(x+2)(x+1)}$, множество *M*, состоит из всех *x*, одновременно удовлетворяющих условиям:

$$9 - x^2 \geq 0,\ x \neq -2 \text{ и } x \neq -1,$$

$M = [-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 3]$. Так как $f(-3) < 0$, $f(3) > 0$, то число $x_1 = -3$ — решение неравенства (1), а число $x_2 = 3$ — нет.

Метод интервалов для непрерывных функций

Функция $f\ (x) = \dfrac{3^{\sqrt{9-x^2}}(x-1)}{(x+2)(x+1)}$ имеет единственный нуль $x_3 = 1$, это число является решением неравенства (1).

Исключив концы промежутков (x_1 и x_2) и нуль функции (x_3) из множества M, получим множество M_1, состоящее только из интервалов: (−3; −2), (−2; −1), (−1; 1) и (1; 3). Функция $f\ (x)$ непрерывна на каждом из этих интервалов, определим её знак в любой точке каждого из них (рис. 1).

Метод интервалов для непрерывных функций

Рис. 1

Множество всех решений неравенства (1) есть объединение интервалов (−3; −2), (−1; 1) и чисел $x_1 = -3$ и $x_3 = 1$.

Ответ. $[-3;\ -2) \cup (-1; 1]$.

Метод интервалов для непрерывных функций

2. Решите неравенство:

$$\frac{2^{\sqrt{9-x^2}}(x^2-9)}{(x-2)(x+1)} \geq 0. \qquad (2)$$

Решение. Область существования функции $f(x) = \frac{2^{\sqrt{9-x^2}}(x^2-9)}{(x-2)(x+1)}$ находим из условий: $9-x^2 \geq 0$, $x \neq 2$ и $x \neq -1$, т. е. $M = [-3; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; 3]$. Так как $f(-3) = 0$, $f(3) = 0$, то числа $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$ являются нулями функции $f(x)$ и решениями неравенства (2).

Метод интервалов для непрерывных функций

Исключив концы промежутков (они же нули функции) — числа x_1 и x_2 — из множества M, получим множество M_1, состоящее только из интервалов: $(-3; -1)$, $(-1; 2)$ и $(2; 3)$. Функция непрерывна на каждом из них. Определим знак функции в любой точке каждого из этих интервалов (рис. 2). Следовательно, множество всех решений неравенства (2) есть объединение интервала $(-1; 2)$ и чисел $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$.

Ответ. $(-1; 2) \cup \{-3; 3\}$.

Рис. 2

Метод интервалов для непрерывных функций

Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{4x+7}-3x+5}{16-3x^2+22x} \le 0. \qquad (3)$$

Решение. Неравенство (3) равносильно неравенству

$$\frac{\sqrt{4x+7}-3x+5}{(x+\frac{2}{3})(x-8)} \ge 0. \qquad (4)$$

Область существования функции

$f(x) = \frac{\sqrt{4x+7}-3x+5}{(x+\frac{2}{3})(x-8)}$, состоит из всех x,

Метод интервалов для непрерывных функций

одновременно удовлетворяющих условиям:

$4x + 7 \geq 0$, $x \neq -\frac{2}{3}$ и $x \neq 8$,

то есть $M = [-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}; 8) \cup (8; +\infty)$.

Так как $f(-\frac{7}{4}) > 0$, то число $x_1 = -\frac{7}{4}$ является решением неравенства (4). Чтобы найти нули функции, решим уравнение

$$\sqrt{4x + 7} - 3x + 5 = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) равносильно системе

Метод интервалов для непрерывных функций

$$\begin{cases} 4x + 7 = (3x - 5)^2, \\ 3x - 5 \geq 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Система (6) имеет единственное решение $x_2 = \frac{17+\sqrt{127}}{9}$. Это число является единственным корнем уравнения (5) и единственным нулём функции $f(x)$, а значит, оно является и решением неравенства (4).

Исключив конец промежутка и нуль функции — числа x_1 и x_2 — из множества M, получим

Метод интервалов для непрерывных функций

множество M_1, состоящее только из интервалов: $\left(-\frac{7}{4};\ -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; x_2\right)$, $(x_2;\ 8)$ и $(8;\ +\infty)$. Функция непрерывна на каждом из них. Определим знак функции в любой точке каждого из этих интервалов (рис. 3).

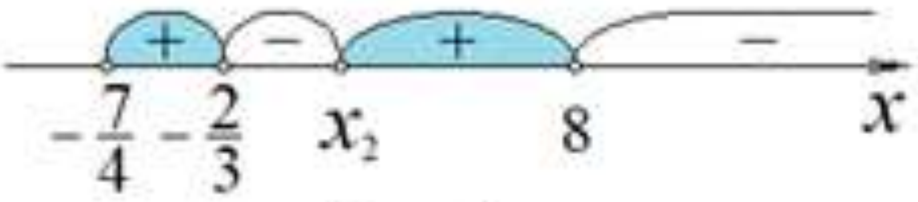


Рис. 3

Метод интервалов для непрерывных функций

Следовательно, множество всех решений неравенства (4), а значит, и равносильного ему неравенства (3), есть объединение интервалов $\left(-\frac{7}{4};\ -\frac{2}{3}\right)$, $(x_2;\ 8)$ и чисел $x_1 = -\frac{7}{4}$ и $x_2 = \frac{17+\sqrt{127}}{9}$.

Ответ. $\left[-\frac{7}{4};\ -\frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{17+\sqrt{127}}{9};\ 8\right)$.

Рассмотрим последнее задание в рассматриваемой теме.

Метод интервалов для непрерывных функций

Решите неравенство:

$$\frac{\left(1+\sqrt{\cos x-1}\right)\left(x^2-7x\right)}{x^2+7x}\le 0. \qquad (7)$$

Решение. Область существования функции $f\,(x) = \dfrac{\left(1+\sqrt{\cos x-1}\right)\left(x^2-7x\right)}{x^2+7x}$, состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям: $\cos x-1\ge 0$, $x\ne -7$, и $x\ne 0$, т. е. множество M состоит из чисел $2\pi k$, где k — любое целое число, кроме 0.

Метод интервалов для непрерывных функций

Так как числа 0 и 7 не принадлежат множеству M и $1 + \sqrt{\cos x - 1} \neq 0$, то у функции $f(x)$ нет нулей. Остаётся проверить, в каких точках множества M дробь $\frac{x^2 - 7x}{x^2 + 7x}$ отрицательна. Для этого решим неравенство

$$\frac{x^2 - 7x}{x^2 + 7x} < 0.$$

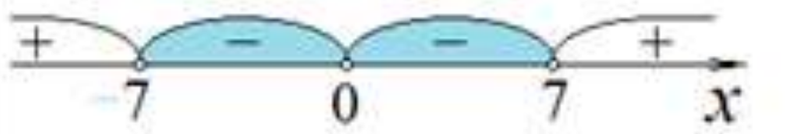


Рис. 4

Оно имеет множество решений $(-7; 0) \cup (0; 7)$ (рис. 4).

Метод интервалов для непрерывных функций

Этому множеству решений принадлежат лишь два числа -2π и 2π из множества *M*. Только они и являются решениями неравенства (7).

Ответ. -2π и 2π.

Подробнее см. п. 12.3 «Метод интервалов для непрерывных функций» из учебника «Алгебра и начала математического анализа, 11 класс» (С. М. Никольский и др.).

Бином. Лаборатория знаний. Редакция «Поколение V»

Готовятся к изданию 3 книжки, посвященные разбору решений трёх последних задач из подготовительных сборников к ЕГЭ.

Задача 17. Экономическая задача.

Задача 18. Параметры.

Задача 19. Простые и сложные задачи, которым мы не учим в школе.

Бином. Лаборатория знаний. Редакция «Поколение V»

Предложения по изменению обложек.

Задачи № 17

Задачи № 18

Задачи № 19