4. Задача Чуйкова и её развитие

Однажды шестиклассник Чуйков Сергей придумал такую задачу.

1. Существует ли на клетчатой бумаге прямоугольник, составленный из клеток-квадратов, в котором количество его внешних клеток равно количеству внутренних клеток?

Рисунок 34 поясняет, какие клетки называют внешними, какие — внутренними. Попробуйте решить эту задачу.

Кто-то из моих учащихся нарисовал один такой прямоугольник, кто-то — другой. Нашлись ученики, которые нарисовали два таких прямоугольника.

Рис. 34

Возник естественный вопрос, сформулированный в виде задачи.

2. Сколько существует прямоугольников, удовлетворяющих условию задачи 1?

Григорьев Д. дал такое **решение**. Сначала закрасим поровну внешних и внутренних клеток, прилежащих к верхнему и нижнему основаниям прямоугольника (как на рисунке 35, где тех и других клеток – 36 у верхней и у нижней стороны).

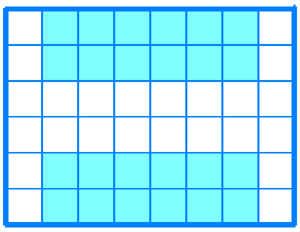

Рис. 35

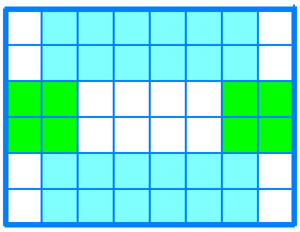

Рис. 36

Затем закрасим поровну внешних и внутренних клеток, прилежащих к боковым сторонам прямоугольника — как на рисунке 36 (здесь клеток каждого вида — две у левой и правой стороны). По углам прямоугольник остались незакрашенными 8 клеток — они внешние. Так как должно быть закрашено поровну внешних и внутренних клеток, то внутри прямоугольника должны остаться незакрашенными тоже 8 клеток — как на рисунке 36.

Эти 8 клеток могут образовать два внутренних прямоугольника: 8x1 и 4x2. Чтобы получить исходные прямоугольники, надо длины сторон внутреннего прямоугольника — 8 и 1, 4 и 2 — увеличить на 4. Получаем два прямоугольника 12x5 и 8x6, удовлетворяющих условию задачи 1.

3. Сколько существует прямоугольников, в которых внешних клеток в 2 раза меньше, чем внутренних?

Решение. (*Халитов Г.*) Сначала закрасим один ряд внешних и два ряда внутренних клеток, прилежащих к верхнему и нижнему основаниям прямоугольника. Затем закрасим один ряд внешних и два ряда внутренних клеток, прилежащих к боковым сторонам прямоугольника — как на рисунке 37.

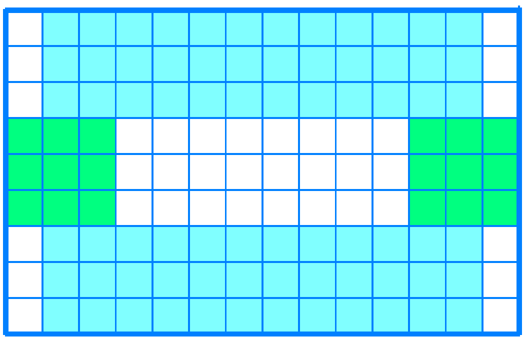

Рис. 37

По углам прямоугольника останутся незакрашенными 12 клеток — они внешние. Чтобы условие задачи было выполнено, незакрашенных внутренних клеток должно остаться в 2 раза больше — 24.

Эти 24 клетки могут образовать 4 прямоугольника: 24x1, 12x2, 8x3, 6x4. Чтобы получить исходные прямоугольники, надо длины сторон этих прямоугольников увеличить на 6. Получаем четыре прямоугольника 30x7, 18x8, 14x9, 12x10, удовлетворяющих условию задачи.

4. Сколько существует прямоугольников, в которых внешних клеток в 3 раза меньше, чем внутренних?

Решение аналогично решению предыдущей задачи 3.

Ответ. Таких прямоугольников существует ровно пять: 56x9, 32x10, 24x11, 20x12, 16x14.

5. Рассмотрим прямоугольники, нарисованные по линиям клетчатой бумаги. Пусть внешних клеток в n раз меньше, чем внутренних (n — натуральное число $n > 1$). Выразите через n длины наименьшей и наибольшей сторон каждого такого прямоугольника.

Решение. (*Халитов Г.*) Сначала закрасим один ряд внешних и n рядов внутренних клеток, прилежащих к верхнему и нижнему основаниям прямоугольника. Затем закрасим один ряд внешних и n рядов внутренних клеток, прилежащих к боковым сторонам прямоугольника, так, как на рисунке 4. При этом по углам прямоугольника останутся незакрашенными $4(n + 1)$ клеток — они все внешние.

Чтобы условие задачи было выполнено, незакрашенных внутренних клеток должно тоже остаться $4n(n + 1) = 4n^2 + 4n$.

Наименьшая сторона внутреннего незакрашенного прямоугольника равна 1, тогда меньшая сторона исходного прямоугольника равна

$$2(n + 1) + 1 = 2n + 3.$$

Соответственно наибольшая сторона этого прямоугольника равна $4n^2 + 4n$. Тогда наибольшая сторона исходного прямоугольника равна

$$4n^2 + 4n + 2(n + 1) = 4n^2 + 6n + 2.$$

Ответ. $2n + 3$ и $4n^2 + 6n + 2$.

Семиклассники могут решить задачу 1, используя уравнения, например, так.

Пусть стороны прямоугольника имеют длину m и n. По смыслу задачи $m \geq 5$ и $n \geq 5$, иначе внешних клеток будет больше, чем внутренних.

Тогда количество внешних клеток равно $2m + 2n - 4$, количество внутренних клеток равно $(m - 2)(n - 2)$. Согласно условию задачи имеем уравнение:

$$(m - 2)(n - 2) = 2m + 2n - 4,$$

или

$$mn - 4m - 4n + 8 = 0. \qquad (1)$$

Прибавим 8 к обеим частям уравнения (1) и разложим левую часть нового уравнения на множители:

$$(m - 4)(n - 4) = 8.$$

Произведение натуральных чисел $m - 4$ и $n - 4$ равно 8 лишь тогда, когда

$m - 4 = 1$ и $n - 4 = 8$,

$m - 4 = 2$ и $n - 4 = 4$,

$m - 4 = 4$ и $n - 4 = 2$,

$m - 4 = 8$ и $n - 4 = 1$.

Получаем только два прямоугольника 6x8 и 12x5, и других прямоугольников нет.