Вокруг теорем Чевы и Менелая[1]

А.В. Шевкин

Теоремы Чевы и Менелая входят в программу по геометрии в девятых классах с углубленным изучением математики. Первую теорему доказал итальянский инженер Джованни Чева (1648–1734), а вторая носит имя Менелая Александрийского (I в.) потому, что сохранился арабский перевод его книги «Сферика», содержащий доказательство аналогичной теоремы для сферического треугольника. Предполагается, что теорема для плоского треугольника была известна Менелаю, возможно даже была им доказана.

Обе эти теоремы имеют несколько способов доказательства — с помощью теоремы о пропорциональных отрезках, с помощью подобия треугольников, с помощью площадей, а также с помощью комбинирования перечисленных приемов доказательства. Это позволяет начать их изучение уже в 8 классе (пример включения этого материала в учебный процесс дан в учебнике [1]). Независимо от времени включения этих красивых теорем в учебный процесс использование различных приемов их доказательства, их применение к решению задач будет способствовать развитию творческого подхода к доказательствам теорем и к решению задач.

Последовательность использования теоретических фактов в статье соответствует учебнику А.В. Погорелова, при работе по другому учебнику, возможно, придется подобие треугольников применять после площадей.

Теорема Чевы

Пусть дан треугольник ABC и на его сторонах AB, BC и AC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно (рис. 1).

а) Если отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (1)$$

б) Если верно равенство (1), то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

На рисунке 1 изображен случай, когда отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке внутри треугольника. Это так называемый случай внутренней точки. Теорема Чевы справедлива и в случае внешней точки, когда одна из точек A_1, B_1 или C_1 принадлежит стороне треугольника, а две другие — продолжениям сторон треугольника. В этом случае точка пересечения отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 лежит вне треугольника (рис. 2).

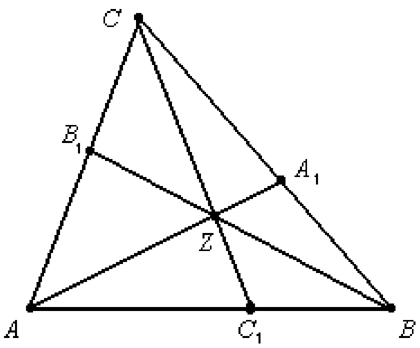


Рис. 1

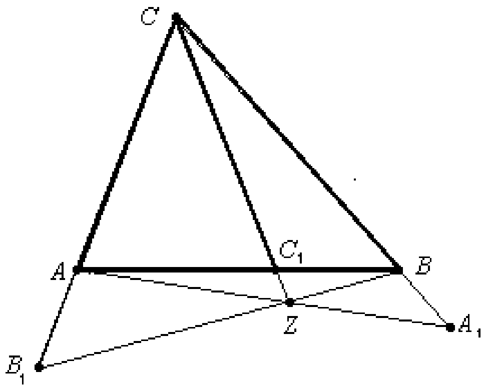


Рис. 2

Как запомнить равенство Чевы?

Обратим внимание на прием запоминания равенства (1). Вершины треугольника в каждом отношении и сами отношения записываются в направлении обхода вершин треугольника ABC, начиная с точки A. От точки A идем к точке B, встречаем точку C_1, записываем дробь $\frac{AC_1}{C_1B}$. Далее от точки B идем к точке C, встречаем точку A_1, записываем дробь $\frac{BA_1}{A_1C}$. Наконец, от точки C идем к точке A, встречаем точку B_1, записываем дробь

[1] Работа поддержана РГНФ (проект № 08-06-00144а).

$\frac{CB_1}{B_1A}$. В случае внешней точки порядок записи дробей сохраняется, хотя две «точки деления» отрезка оказываются вне своих отрезков. В таких случаях говорят, что точка делит отрезок внешним образом.

Отметим, что любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с любой точкой прямой, содержащей противоположную сторону треугольника, называют **чевианой**.

Рассмотрим несколько способов доказательства утверждения а) теоремы Чевы для случая внутренней точки. Чтобы доказать теорему Чевы, надо доказать утверждение а) любым из предложенных ниже способов, а также доказать утверждение б). Доказательство утверждения б) приведено после первого способа доказательства утверждения а). Доказательства теоремы Чевы для случая внешней точки проводятся аналогично.

Доказательство с помощью теоремы о пропорциональных отрезках

I способ. а) Пусть три чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке Z внутри треугольника ABC.

Идея доказательства заключается в том, чтобы отношения отрезков из равенства (1) заменить отношениями отрезков, лежащих на одной прямой.

Через точку B проведем прямую, параллельную чевиане CC_1. Прямая AA_1 пересекает построенную прямую в точке M, а прямая, проходящая через точку C и параллельная AA_1, — в точке T. Через точки A и C проведем прямые, параллельные чевиане BB_1. Они пересекут прямую BM в точках N и R соответственно (рис. 3).

По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BM}{TM},\ \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BR}{BN} \text{ и } \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AZ}{ZM} = \frac{BN}{BM}.$$

Тогда справедливы равенства

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BM\cdot BR\cdot BN}{TM\cdot BN\cdot BM} = \frac{BR}{TM}.$$

В параллелограммах $ZCTM$ и $ZCRB$ отрезки TM, CZ и BR равны как противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, $\frac{BR}{TM} = 1$ и верно равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Утверждение а) теоремы Чевы доказано.

При доказательстве утверждения б) используем следующее утверждение.

Лемма 1. Если точки C_1 и C_2 делят отрезок AB внутренним (или внешним) образом в одном и том же отношении, считая от одной и той же точки, то эти точки совпадают.

Докажем лемму для случая, когда точки C_1 и C_2 делят отрезок AB внутренним образом в одном и том же отношении: $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B}$.

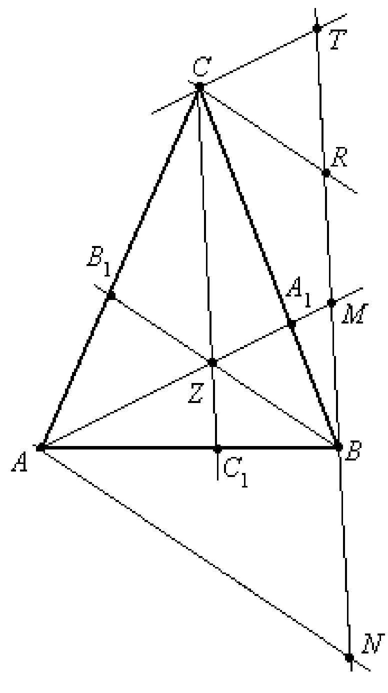


Рис. 3

Доказательство. Из равенства $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B}$ следуют равенства $\frac{AC_2}{C_2B} + \frac{C_2B}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{C_1B}{C_1B}$ и $\frac{AB}{C_2B} = \frac{AB}{C_1B}$. Последнее из них выполняется лишь при условии, что C_1B и C_2B равны, т. е. при условии, что точки C_1 и C_2 совпадают.

Доказательство леммы для случая, когда точки C_1 и C_2 делят отрезок AB внешним образом проводится аналогично.

Доказательство утверждения б) теоремы Чевы

Пусть теперь верно равенство (1). Докажем, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Пусть чевианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке Z, проведем через эту точку отрезок CC_2 (C_2 лежит на отрезке AB). Тогда на основании утверждения а) получаем верное равенство

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (2)$$

Из сравнения равенств (1) и (2) заключаем, что $\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC_1}{C_1B}$, т. е. точки C_1 и C_2 делят отрезок AB в одном и том же отношении, считая от одной и той же точки. Из леммы 1 следует, что точки C_1 и C_2 совпадают. Это означает, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

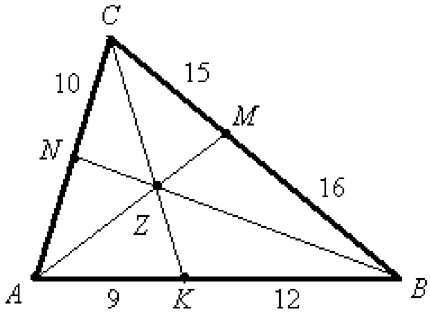


Рис. 4

Задание 1. Докажите, что процедура записи равенства (1) не зависит, от того, от какой точки и в каком направлении совершается обход вершин треугольника.

Задание 2. Найдите длину отрезка AN на рисунке 4, на котором указаны длины других отрезков.

Ответ. 8.

Задание 3. Чевианы AM, BN, CK пересекаются в одной точке внутри треугольника ABC. Найдите отношение $CN:NA$, если $AK:KB = 3:4$, $BM:MC = 6:5$.

Ответ. 10:9.

Задание 4. С помощью теоремы Чевы докажите, что:

а) три медианы треугольника пересекаются в одной точке;

б) три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;

в) три высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

Приведем доказательство утверждения в) из учебника [1].

Доказательство. Пусть в остроугольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, AC и AB соответственно (рис. 5). Прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C подобны по двум углам, поэтому $\frac{CA_1}{B_1C}=\frac{CA}{BC}$.

Аналогично из подобия прямоугольных треугольников AA_1B и CC_1B, BB_1A и CC_1A следует, что верны равенства:

$$\frac{BC_1}{A_1B}=\frac{BC}{AB},\ \frac{AB_1}{C_1A}=\frac{AB}{CA}.$$

Перемножив три полученные равенства, получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

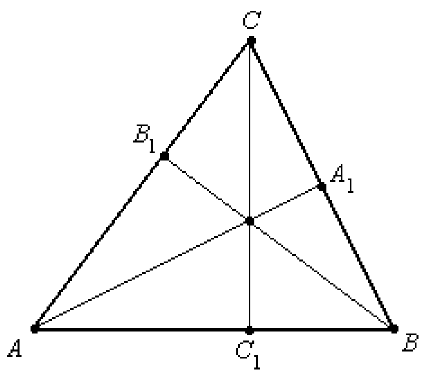


Рис. 5

Равенство (1) доказано. Из теоремы Чевы следует, что три высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

Задание 5. Докажите утверждение в) из задания 4 без применения подобия треугольников.

Задание 6. Три окружности касаются друг друга внешним образом. Центр каждой окружности соединили отрезком с точкой касания двух других окружностей. Докажите, что эти отрезки пересекаются в одной точке.

Задание 7. Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке. Эту точку называют **точкой Жергона**.

Вневписанная окружность — это окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Её центр является точкой пересечения биссектрис двух внешних углов треугольника (рис. 6).

Рассмотрим задания 8 и 9, с помощью которых будет решено задание 10.

Задание 8. Докажите, что каждая точка касания вневписанной окружности делит периметр треугольника пополам, т. е. если A_1 — точка касания вневписанной окружности, принадлежащая стороне BC треугольника ABC, то $AC + CA_1 = AB + BA_1$ (рис. 6).

Решение. Рассмотрим вневписанную окружность, касающуюся стороны AB треугольника ABC и продолжений сторон AC и BC в точках C_1, M и N соответственно. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $CM = CN$, $AM = AC_1$, $BN = BC_1$, поэтому $CA + AC_1 = C_1B + BC$. Это означает, что точка C_1 делит периметр треугольника пополам. Аналогично показывается, что каждая из точек A_1 и B_1 — точек касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника — делит периметр треугольника пополам, что и требовалось доказать.

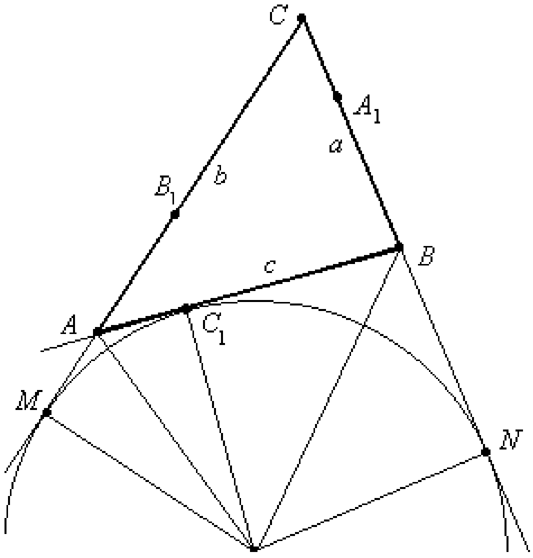


Рис. 6

Задание 9. Три вневписанные окружности касаются сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1, принадлежащих сторонам BC, AC и AB соответственно. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Выразите через a, b и c длины отрезков, на которые точки касания делят стороны треугольника.

Решение. Так как $CM = CN = \dfrac{a+b+c}{2} = p$, то $AM = AC_1 = p - b$, $BN = BC_1 = p - a$. Аналогично получаем, что $AB_1 = p - c$, $CB_1 = p - a$, $A_1C = p - b$, $AB_1 = p - c$ (рис. 6).

Задание 10. Пусть дан треугольник ABC. Вневписанные окружности касаются его сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Эту точку называют **точкой Нагеля**.

Задание 11. Докажите теорему Чевы для случая внешней точки.

Задание 12. С помощью теоремы Чевы докажите, что три прямые, содержащие высоты тупоугольного треугольника, пересекаются в одной точке.

Доказательства с помощью подобия треугольников

Приведем доказательство теоремы Чевы из статьи [2]. Его идея заключается в том, чтобы заменить отношения отрезков из равенства (1) отношениями отрезков, лежащих на параллельных прямых.

II способ. а) Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O внутри треугольника ABC (рис. 7). Через вершину C треугольника ABC проведем прямую, параллельную AB, и ее точки пересечения с прямыми AA_1, BB_1 обозначим соответственно A_2, B_2. Из подобия двух пар треугольников CB_2B_1 и ABB_1, BAA_1 и CA_2A_1, имеем равенства

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{CB_2},\ \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA_2}{AB}. \qquad (3)$$

Из подобия треугольников BC_1O и B_2CO, AC_1O и A_2CO имеем равенства $\dfrac{BC_1}{CB_2} = \dfrac{C_1O}{OC} = \dfrac{C_1A}{CA_2}$, из которых следует, что

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{CB_2}{CA_2}. \qquad (4)$$

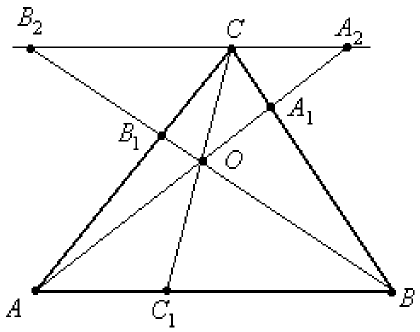


Рис. 7

Перемножив равенства (3) и (4), получим равенство (1).

Утверждение а) теоремы Чевы доказано.

III способ. а) Пусть три чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке Z внутри треугольника ABC.

Из вершин треугольника ABC проведем высоты к трем чевианам (рис. 8). Треугольники AMC_1 и BNC_1 подобны по двум углам, поэтому верно равенство $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AM}{BN}$.

Аналогично верны равенства

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BP}{CT} \text{ и } \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CS}{RA},$$

откуда следует, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AM \cdot BP \cdot CS}{BN \cdot CT \cdot RA}. \qquad (5)$$

Выразив в равенстве (5) шесть отрезков через отрезки AZ, BZ и CZ с помощью синусов углов α, β и γ, получим верные равенства:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AM \cdot BP \cdot CS}{BN \cdot CT \cdot AR} =$$

$$= \frac{AZ \cdot \sin\alpha \cdot BZ \cdot \sin\gamma \cdot CZ \cdot \sin\beta}{BZ \cdot \sin\beta \cdot CZ \cdot \sin\alpha \cdot AZ \cdot \sin\gamma} = 1.$$

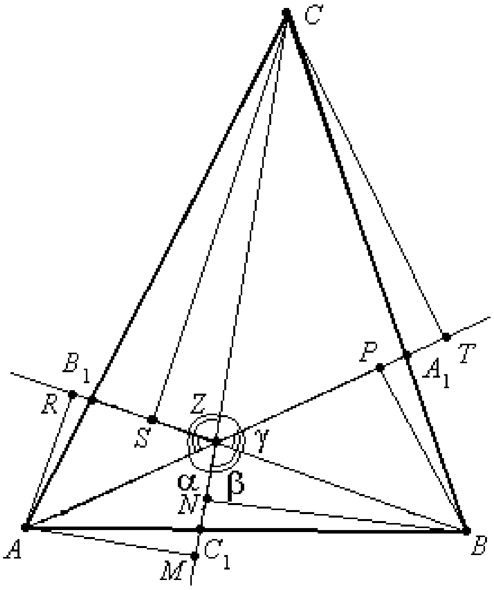


Рис. 8

Утверждение а) теоремы Чевы доказано.

IV способ. а) Пусть три чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке Z внутри треугольника ABC.

Через точку C проведем прямую, параллельную чевиане BB_1 и пересекающую прямую AA_1 в точке M. Через точку A проведем прямую, параллельную чевиане BB_1 и пересекающую прямую CC_1 в точке N (рис. 9).

Используя теорему о пропорциональных отрезках и подобие треугольников, запишем равенства:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AN}{BZ}, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BZ}{CM}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CZ}{NZ} = \frac{CM}{AN}.$$

Тогда $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = \dfrac{AN \cdot BZ \cdot CM}{BZ \cdot CM \cdot AN} = 1.$

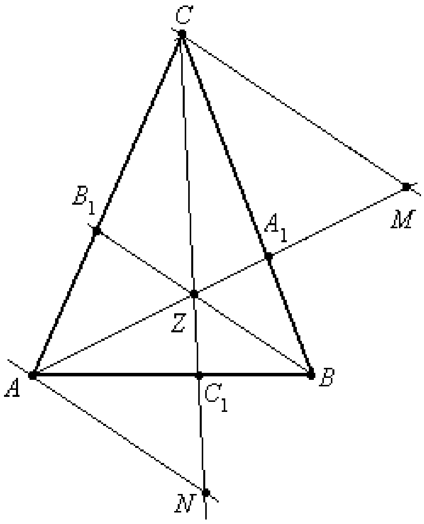


Рис. 9

Утверждение а) теоремы Чевы доказано.

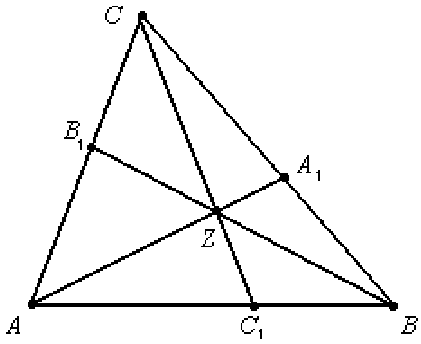
Доказательства с помощью площадей

Рассмотрим доказательства теоремы Чевы с помощью площадей. Первое из них, изложенное в книге А.Г. Мякишева [3], простое и опирается на утверждения, которые мы сформулируем в виде заданий 12 и 13.

Задание 13. Отношение площадей двух треугольников с общей вершиной и основаниями, лежащими на одной прямой, равно отношению длин этих оснований. Докажите это утверждение.

Задание 14. Докажите, что если $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+c}{b+d}$ и $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a-c}{b-d}$.

V способ. а) Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке Z (рис. 10), тогда



$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{AC_1C}}{S_{C_1BC}},\ \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{AC_1Z}}{S_{C_1BZ}}. \qquad (6)$$

Из равенств (6) и второго утверждения задания 14 следует, что $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{AC_1C}-S_{AC_1Z}}{S_{C_1BC}-S_{C_1BZ}}$ или $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{ACZ}}{S_{BCZ}}$. Аналогично получим, что $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{ABZ}}{S_{ACZ}}$ и $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{BCZ}}{S_{ABZ}}$. Перемножив три последние равенства, получим: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{ACZ}}{S_{BCZ}}\cdot\frac{S_{ABZ}}{S_{ACZ}}\cdot\frac{S_{BCZ}}{S_{ABZ}}=1$, т. е. верно равенство (1), что и требовалось доказать.

Утверждение а) теоремы Чевы доказано.

Отношение площадей треугольников с общим основанием, которое использовалось в приведенном способе доказательства, можно получить другим способом. Приведем доказательство теоремы Чевы из статьи [4].

VI способ. а) Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Опустим из вершин A и B треугольника ABC перпендикуляры AA_0, BB_0 на прямую CC_0 (рис. 11). Треугольники AC_1A_0 и BC_1B_0 подобны, следовательно, $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}$.

Аналогичным образом получаем, что $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{BOA}}{S_{COA}}$ и $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{COB}}{S_{AOB}}$.

Перемножив полученные равенства, получим: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

Утверждение а) теоремы Чевы доказано.

Задание 15. Пусть чевианы пересекаются в одной точке внутри треугольника и разбивают его на 6 треугольников, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 (рис. 12). Докажите, что $S_1\cdot S_3\cdot S_5=S_2\cdot S_4\cdot S_6$.

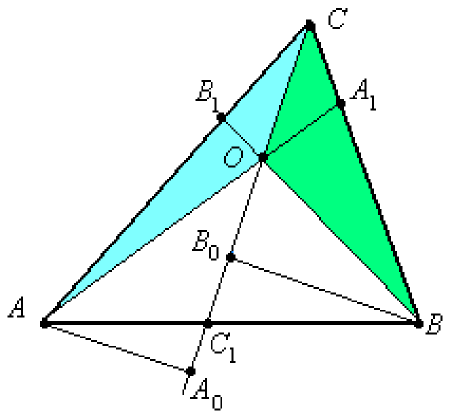


Рис. 11

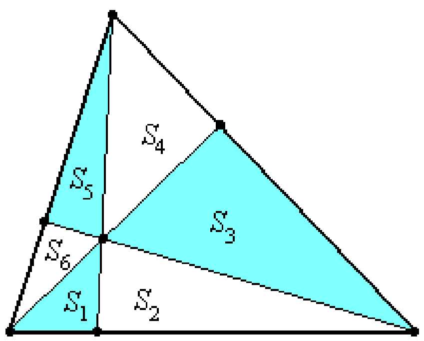


Рис. 12

Задание 16. Найдите площадь S треугольника CNZ (площади других треугольников указаны на рисунке 13).

Ответ. 15.

Задание 17. Найдите площадь S треугольника CNO, если площадь треугольника ANO равна 10 и AK:KB = 2:3, BM:MC = 1:2 (рис. 14).

Ответ. 30.

Задание 18. Найдите площадь S треугольника CNO, если площадь треугольника ABC равна 88 и AK:KB = 2:3, BM:MC = 1:2 (рис. 14).

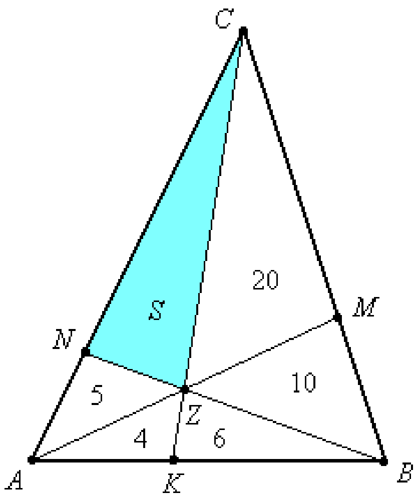


Рис. 13

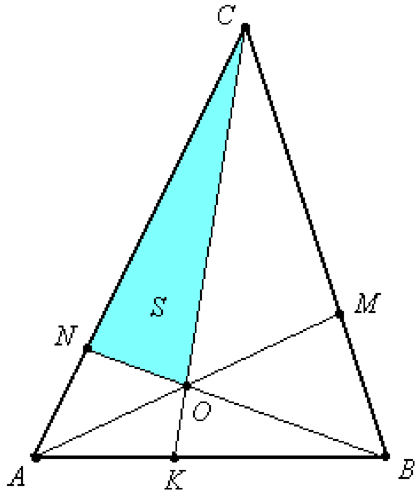


Рис. 14

Решение. Так как $AK{:}KB = 2{:}3$, то обозначим $S_{AKO} = 2x$, $S_{BKO} = 3x$. Так как $BM{:}MC = 1{:}2$, то обозначим $S_{BMO} = y$, $S_{CMO} = 2y$. Из теоремы Чевы следует, что $\frac{CN}{NA}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = 1$, и тогда $\frac{CN}{NA} = 3$. Если $S_{CNO} = S$, то $S_{ANO} = \frac{S}{3}$ (рис. 15). У нас три неизвестные величины (x, y и S), поэтому для нахождения S составим три уравнения.

Так как $S_{ABC} = 88$, то $\frac{4S}{3} + 3y + 5x = 88$. Так как $S_{AOC}{:}S_{BOC} = 2{:}3$, то $\frac{\frac{4S}{3}}{2} = \frac{3y}{3}$, откуда $3y = 2S$. Так как $S_{AOB}{:}S_{AOC} = 1{:}2$, то $5x = \frac{\frac{4S}{3}}{2} = \frac{2S}{3}$.

Итак, $\frac{4S}{3} + 2S + \frac{2S}{3} = 88$, откуда $S = 22$.

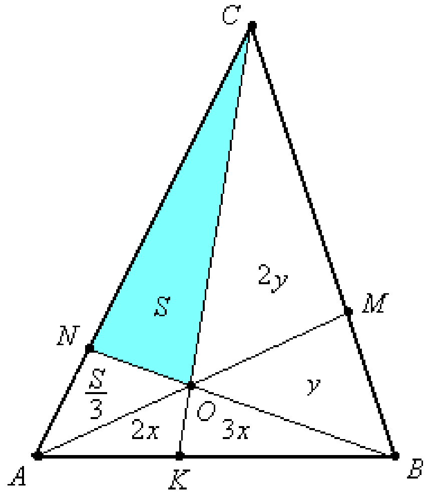


Рис. 15

Задание 19 (МГУ, заочные подготовительные курсы). В треугольнике ABC точки K и L принадлежат соответственно сторонам AB и BC. $AK{:}KB = 1{:}2$, $CL{:}LB = 2{:}1$. P — точка пересечения отрезков AL и CK. Площадь треугольника PBC равна 1. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ. 1,75.

Задание 20 (Теорема Жергона и ее следствие). Докажите, что если прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с точками противоположных сторон A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке Z, то верно равенство:

а) $\frac{ZA_1}{A_1A} + \frac{ZB_1}{B_1B} + \frac{ZC_1}{C_1C} = 1$; б) $\frac{ZA}{A_1A} + \frac{ZB}{B_1B} + \frac{ZC}{C_1C} = 2$.

Идея доказательства теоремы Жергона заключается в замене отношений длин отрезков отношениями площадей. Покажем применение этой идеи при доказательстве более сложного утверждения.

Задание 21. Докажите, что если прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с точками противоположных сторон A_1 и B_1, взятыми на продолжениях сторон BC и AC соответственно, и точкой C_1, взятой на стороне AB, пересекаются в точке Z (рис. 16), то:

а) $\frac{ZA_1}{AA_1} + \frac{ZB_1}{BB_1} - \frac{ZC_1}{CC_1} = 1$; б) $\frac{ZA}{AA_1} + \frac{ZB}{BB_1} - \frac{ZC}{CC_1} = 0$.

Доказательство. а) Пусть h_a, h_b, h_c — высоты треугольника ABC, H_a, H_b, H_c — расстояния от точки Z до прямых BC, AC, AB соответственно. Из подобия прямоугольных треугольников с общим острым углов имеем: $\frac{ZA_1}{AA_1}=\frac{H_a}{h_a}$. Отношение $\frac{H_a}{h_a}$ равно отношению площадей треугольников ZBC и ABC с общим основанием BC: $\frac{H_a}{h_a}=\frac{S_{ZBC}}{S_{ABC}}$, т. е. $\frac{ZA_1}{AA_1}=\frac{S_{ZBC}}{S_{ABC}}$. Аналогично получим, что

$$\frac{ZB_1}{BB_1}=\frac{H_b}{h_b}=\frac{S_{ZAC}}{S_{ABC}} \text{ и } \frac{ZC_1}{CC_1}=\frac{H_c}{h_c}=\frac{S_{ZAB}}{S_{ABC}}.$$

Тогда $\frac{ZA_1}{AA_1}+\frac{ZB_1}{BB_1}-\frac{ZC_1}{CC_1}=\frac{S_{ZBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{ZAC}}{S_{ABC}}-\frac{S_{ZAB}}{S_{ABC}}=$

$=\frac{S_{ZBC}+S_{ZAC}-S_{ZAB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1$, что и требовалось доказать.

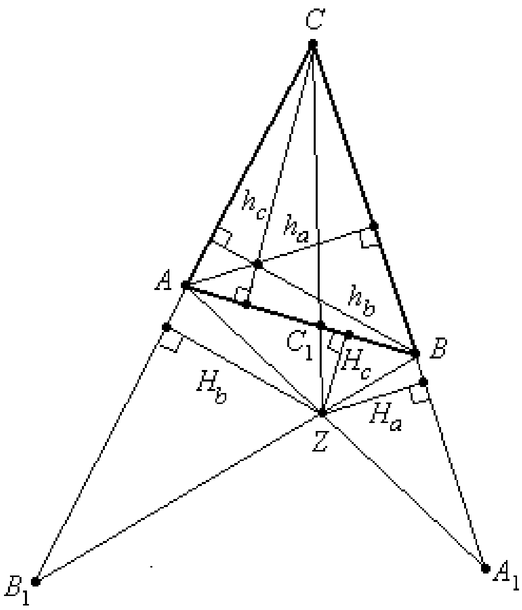


Рис. 16

б) Преобразуем левую часть доказываемого равенства, используя результат, полученный при выполнении задания 21 (а):

$$\frac{ZA}{AA_1}+\frac{ZB}{BB_1}-\frac{ZC}{CC_1}=\frac{AA_1-ZA_1}{AA_1}+\frac{BB_1-ZB_1}{BB_1}-\frac{CC_1-ZC_1}{CC_1}=$$

$$=1-\frac{ZA_1}{AA_1}+1-\frac{ZB_1}{BB_1}-1+\frac{ZC_1}{CC_1}=1-\left(\frac{ZA_1}{AA_1}+\frac{ZB_1}{BB_1}-\frac{ZC_1}{CC_1}\right)=1-1=0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема Менелая

Пусть дан треугольник ABC и на его сторонах AC и CB отмечены точки B_1 и A_1 соответственно, а на продолжении стороны AB отмечена точка C_1 (рис. 17).

а) Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1. \qquad (7)$$

б) Если верно равенство (7), то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

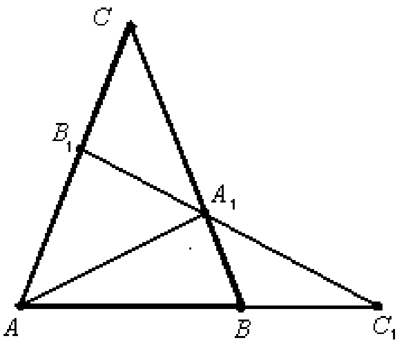


Рис. 17

Как запомнить равенство Менелая?

Прием запоминания равенства (7) тот же, что и для равенства (1). Вершины треугольника в каждом отношении и сами отношения записываются в направлении обхода вершин треугольника ABC — от вершины к вершине, проходя через точки деления (внутренние или внешние).

Задание 22. Докажите, что при записи равенства (7) от любой вершины треугольника в любом направлении получается один и тот же результат.

Чтобы доказать теорему Менелая, надо доказать утверждение а) любым из предложенных ниже способов, а также доказать утверждение б). Доказательство утверждения б) приведено после первого способа доказательства утверждения а).

Доказательство с помощью теоремы о пропорциональных отрезках

I способ. а) Идея доказательства заключается в замене отношений длин отрезков в равенстве (7) отношениями длин отрезков, лежащих на одной прямой.

Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Через точку C проведем прямую l, параллельную прямой A_1B_1, она пересекает прямую AB в точке M (рис. 18).

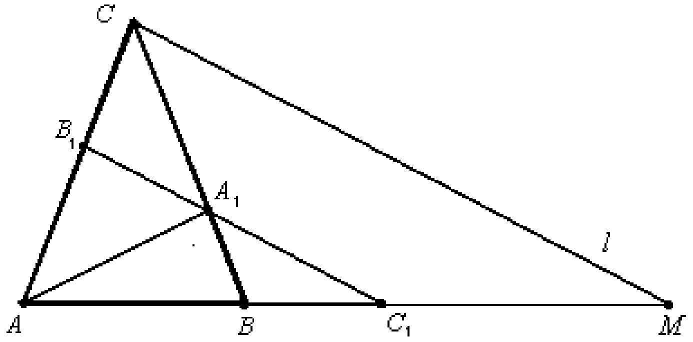


Рис. 18

По теореме о пропорциональных отрезках имеем: $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{C_1A}{C_1M}$ и $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{C_1M}{BC_1}$.

Тогда верны равенства $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{C_1A \cdot C_1M \cdot BC_1}{C_1M \cdot BC_1 \cdot C_1A} = 1.$

Утверждение а) теоремы Менелая доказано.

Доказательство утверждения б) теоремы Менелая

Пусть теперь верно равенство (7), докажем, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Пусть прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке C_2 (рис. 19).

Так как точки A_1 B_1 и C_2 лежат на одной прямой, то по утверждению а) теоремы Менелая

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = 1. \qquad (8)$$

Из сравнения равенств (7) и (8) имеем $\frac{BC_2}{C_2A} = \frac{BC_1}{C_1A}$,

откуда следует, что верны равенства $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B}$,

$\frac{AB + BC_2}{C_2B} = \frac{AB + BC_1}{C_1B}$, $\frac{AB}{C_2B} = \frac{AB}{C_1B}$.

Последнее равенство верно лишь при условии $C_2B = C_1B$, т. е. если точки C_1 и C_2 совпадают.

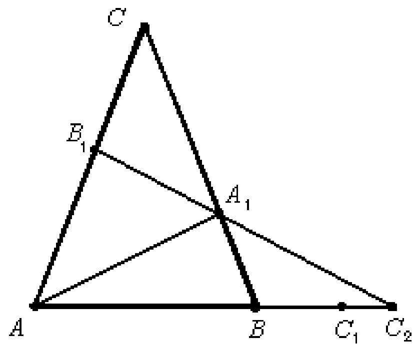


Рис. 19

Утверждение б) теоремы Менелая доказано.

Доказательства с помощью подобия треугольников

II способ. а) Идея доказательства заключается в том, чтобы заменить отношения длин отрезков из равенства (7) отношениями длин отрезков, лежащих на параллельных прямых.

Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Из точек A, B и C проведем перпендикуляры AA_0, BB_0 и CC_0 к этой прямой (рис. 20).

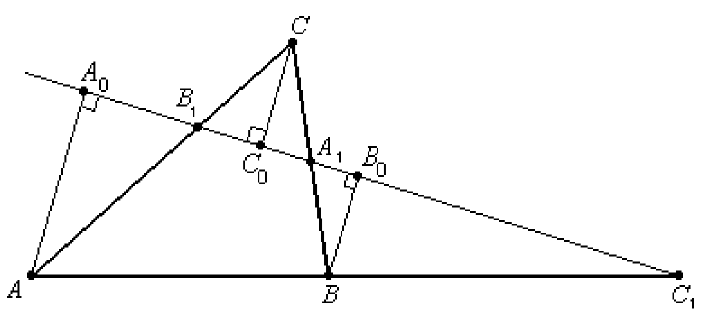


Рис. 20

Из подобия трех пар треугольников AA_0B_1 и CC_0B_1, CC_0A_1 и BB_0A_1, C_1B_0B и C_1A_0A (по двум углам) имеем верные равенства

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AA_0}{CC_0},\ \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CC_0}{BB_0},\ \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BB_0}{AA_0},$$

перемножив их, получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{AA_0\cdot CC_0\cdot BB_0}{CC_0\cdot BB_0\cdot AA_0}=1.$$

Утверждение а) теоремы Менелая доказано.

III способ. а) Уменьшим число используемых пар подобных треугольников. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Через точку B проведем прямую l, параллельную прямой AC, она пересекает прямую A_1B_1 в точке M (рис. 21).

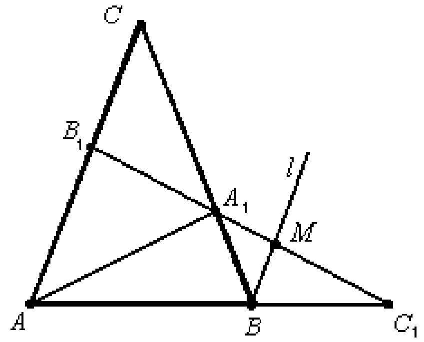


Рис. 21

Из подобия двух пар треугольников AB_1C и BMC_1, B_1CA_1 и MBA_1 имеем:

$$\frac{AB_1}{BM}=\frac{C_1A}{BC_1}\ \text{и}\ \frac{BM}{B_1C}=\frac{A_1B}{CA_1}. \qquad (9)$$

Перемножив равенства (9), получим, что $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{C_1A\cdot A_1B}{BC_1\cdot CA_1}$, откуда следует, что

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{C_1A\cdot A_1B\cdot CA_1\cdot BC_1}{BC_1\cdot CA_1\cdot A_1B\cdot C_1A}=1.$$

Утверждение а) теоремы Менелая доказано.

Доказательство с помощью площадей

Идея доказательства заключается в замене отношения длин отрезков из равенства (7) отношениями площадей треугольников.

IV способ. а) Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Соединим точки C и C_1. Обозначим площади треугольников S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 (рис. 22).

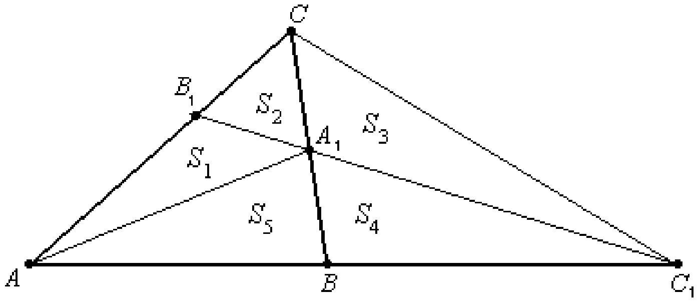


Рис. 22

Тогда справедливы равенства

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{S_1}{S_2},\ \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{S_3}{S_4},\ \frac{C_1B}{C_1A}=\frac{S_4}{S_4+S_5}. \qquad (10)$$

Перемножив равенства (10), получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}=\frac{S_1\cdot S_3}{S_2\cdot(S_4+S_5)}=\frac{S_1}{S_4+S_5}\cdot\frac{S_3}{S_2}=\frac{A_1B_1}{A_1C_1}\cdot\frac{A_1C_1}{A_1B_1}=1.$$

Утверждение а) теоремы Менелая доказано.

Подобно тому, как теорема Чевы остается справедливой и в том случае, если точка пересечения чевиан находится вне треугольника, теорема Менелая остается справедливой и в том случае, если секущая пересекает только продолжения сторон треугольника. В этом случае можно говорить о пересечении сторон треугольника во внешних точках.

Доказательство для случая внешних точек

а) Пусть секущая пересекает стороны треугольника ABC во внешних точках, т. е. пересекает продолжения сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно и эти точки лежат на одной прямой (рис. 23).

По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{C_1A}{C_1M} \text{ и } \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{C_1M}{BC_1}.$$

Тогда верны равенства

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{C_1A\cdot C_1M\cdot BC_1}{C_1M\cdot BC_1\cdot C_1A}=1.$$

Утверждение а) теоремы Менелая доказано.

Заметим, что приведенное доказательство совпадает с доказательством теоремы Менелая для случая, когда секущая пересекает две стороны треугольника во внутренних точках и одну во внешней.

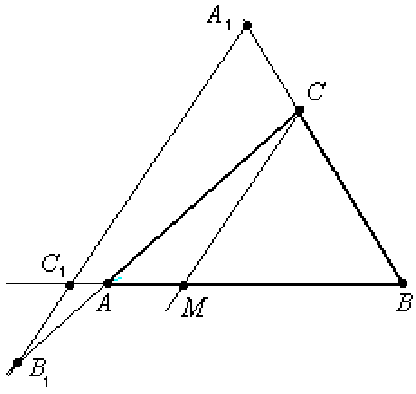


Рис. 23

Доказательство утверждения б) теоремы Менелая для случая внешних точек аналогично доказательству, приведенному выше.

Задание 23. В треугольнике ABC точки A_1, B_1 лежат соответственно на сторонах BC и AC. P — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. $AB_1{:}B_1C$ = = 7:8, $CA_1{:}A_1B$ = 4:3. Найдите отношение $BP{:}PB_1$.

Решение. Обозначим $AB_1 = 7m$, $B_1C = 8m$, $CA_1 = 4k$, $A_1B = 3k$ (рис. 24). По теореме Менелая для треугольника BCB_1 и секущей PA_1 запишем верное равенство: $\frac{BP}{PB_1}\cdot\frac{B_1A}{AC}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}$ = 1, откуда следует, что

$$\frac{BP}{PB_1}=\frac{AC}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{CA_1}=\frac{15m}{7m}\cdot\frac{3k}{4k}=\frac{45}{28}.$$

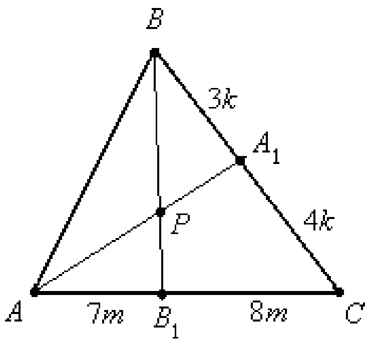


Рис. 24

Ответ. $\frac{45}{28}$.

Задание 24 (МГУ, заочные подготовительные курсы). В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении $AK{:}BK$ = 2:3, а на стороне AC — точка L, делящая AC в отношении $AL{:}LC$ = 5:3. Точка P пересечения прямых CK и BL удалена от прямой AB на расстояние 1,5. Найдите длину стороны AB.

Решение. Из точек P и C опустим перпендикуляры PR и CM на прямую AB. Обозначим AK = $2n$, BK = $3n$, AL = $5m$, LC = $3m$ (рис. 25). По теореме Менелая для треугольника AKC и секущей PL запишем верное равенство: $\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CP}{PK}\cdot\frac{KB}{BA}$ = 1, откуда получим, что $\frac{CP}{PK}=\frac{3m}{5m}\cdot\frac{5n}{3n}$ = 1, $CP = KP$.

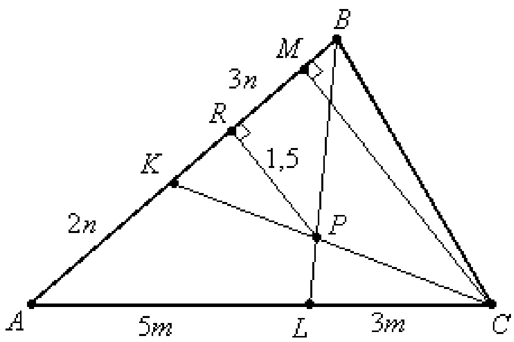


Рис. 25

Из подобия треугольников KMC и KRP (по двум углам) получим, что $\frac{MC}{PR}=\frac{KC}{PK}$, откуда следует, что CM = 3.

Теперь, зная длину высоты, проведенной к стороне AB треугольника ABC, и площадь этого треугольника, вычислим длину стороны: $AB = \frac{6\cdot 2}{3} = 4$.

Ответ. 4.

Задание 25. Три окружности с центрами A, B, C, радиусы которых относятся как 11:12:9, касаются друг друга внешним образом в точках X, Y, Z как показано на рисунке 26. Отрезки AX и BY пересекаются в точке O. В каком отношении, считая от точки B, отрезок CZ делит отрезок BY?

Решение. Обозначим $AY = 11k$, $CX = 9k$, $BZ = 12k$ (рис. 26). Так как $\frac{AY}{YC}\cdot\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZA} = \frac{11k\cdot 9k\cdot 12k}{9k\cdot 11k\cdot 12k} = 1$, то по утверждению б) теоремы Чевы отрезки AX, BY и CZ пересекаются в одной точке — точке O. Тогда отрезок CZ делит отрезок BY в отношении $\frac{BO}{OY}$. Найдем это отношение.

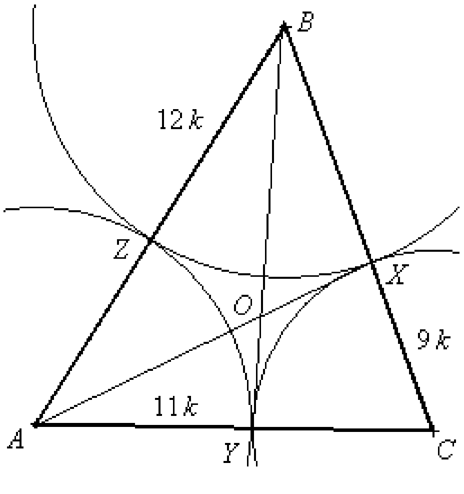


Рис. 26

По теореме Менелая для треугольника BCY и секущей OX имеем: $\frac{BO}{OY}\cdot\frac{YA}{AC}\cdot\frac{CX}{XB} = 1$, откуда следует, что $\frac{BO}{OY} = \frac{20k}{11k}\cdot\frac{12k}{9k} = \frac{80}{33}$.

Ответ. $\frac{80}{33}$.

Задание 26 (Теорема Паскаля). Точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть дан шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в окружность. Продолжения противоположных сторон AB и DE, BC и EF, CD и FA шестиугольника пересекаются в точках G, H и K соответственно (рис. 27).

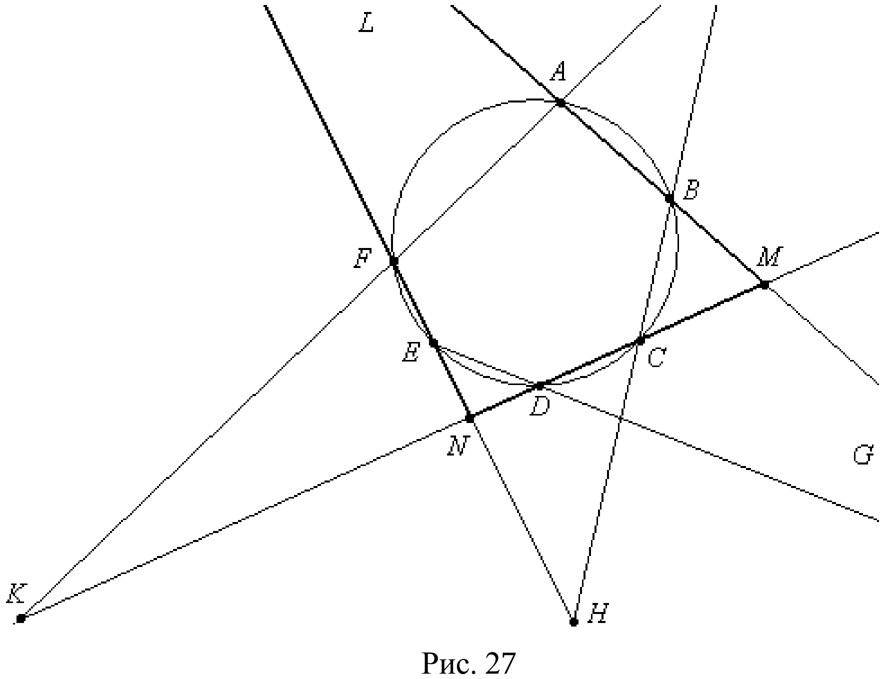


Рис. 27

Пусть прямые AB и EF, AB и CD, CD и EF пересекаются в точках L, M и N соответственно (точки L и G находятся за пределами рисунка). По теореме Менелая для треугольника LMN имеем верные равенства:

$$\frac{LG\cdot MD\cdot NE}{GM\cdot DN\cdot EL} = 1,\ \frac{MK\cdot NF\cdot LA}{KN\cdot FL\cdot AM} = 1,\ \frac{NH\cdot LB\cdot MC}{HL\cdot BM\cdot CN} = 1.$$

Перемножив их, получим, что

$$\frac{LG\cdot MD\cdot NE\cdot MK\cdot NF\cdot LA\cdot NH\cdot LB\cdot MC}{GM\cdot DN\cdot EL\cdot KN\cdot FL\cdot AM\cdot HL\cdot BM\cdot CN} = 1. \qquad (11)$$

Из теоремы о свойстве секущих, проведенных к окружности из одной точки, следует, что верны равенства:

$$MD\cdot MC = AM\cdot BM,\ \ NE\cdot NF = CN\cdot DN,\ \ LA\cdot LB = EL\cdot FL\,.$$

Сократив равные произведения отрезков в левой части равенства (11), получим верное равенство $\dfrac{LG\cdot MK\cdot NH}{GM\cdot KN\cdot HL} = 1$, означающее, на основании утверждения б) теоремы Менелая для случая внешних точек, что точки *G, H* и *K* лежат на одной прямой.

Задание 27. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.

В статье И.Ф. Шарыгина [5] нашлось утверждение, которое мы сформулируем ниже. Отметим только, что его доказательство было получено как следствие теоремы Чевы, записанной в форме синусов. Так как у нас эта техника не использовалась, то приведем иное доказательство того же утверждения. Для этого докажем теорему о вписанном шестиугольнике.

Лемма 2. Если точки F и F_1 принадлежит дуге AE окружности и $\dfrac{EF}{FA}=\dfrac{EF_1}{F_1A}$, то точки F и F_1 совпадают.

Доказательство. Пусть точка F_1 принадлежат дуге AFE окружности и $\dfrac{EF}{FA}=\dfrac{EF_1}{F_1A}$.

Проведем биссектрисы вписанных углов AFE и AF_1E. Они пересекутся в середине дуги AE, не содержащей точек F и F_1, и пересекут хорду AE в точках M и N (рис. 28).

В треугольниках AFE и AF_1E по свойству биссектрисы угла имеем: $\dfrac{EF}{FA}=\dfrac{EM}{MA}$ и $\dfrac{EF_1}{F_1A}=\dfrac{EN}{NA}$. Так как $\dfrac{EF}{FA}=\dfrac{EF_1}{F_1A}$ по условию, то $\dfrac{EM}{MA} = \dfrac{EN}{NA}$, т. е. точки M и N делят один и тот же отрезок в одном и том же отношении, считая от одной и той же точки. Тогда точки M и N совпадают (лемма 1) и точки F и F_1 совпадают, что и требовалось доказать.

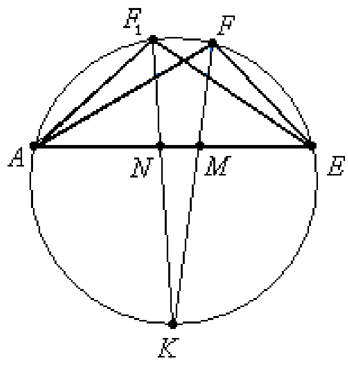


Рис. 28

Теорема о вписанном шестиугольнике. Пусть шестиугольник *ABCDEF* вписан в окружность.

а) Если его диагонали *AD, BE, CF* пересекаются в одной точке, то верно равенство

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA} = 1. \qquad (12)$$

б) Если верно равенство (12), то диагонали *AD, BE, CF* шестиугольника *ABCDEF* пересекаются в одной точке.

Доказательство. а) Пусть шестиугольник *ABCDEF* вписан в окружность и его диагонали *AD, BE, CF* пересекаются в точке *O* (рис. 29). Имеется три пары треугольников, подобных по двум углам (вертикальные углы равны, вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности, равны): *AOB* и *EOD, BOC* и *FOE, COD* и *AOF*. Их стороны пропорциональны, поэтому верны равенства:

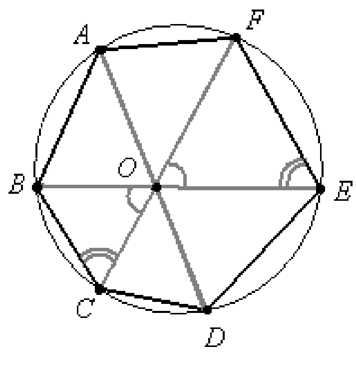


Рис. 29

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BO}{DO},\ \frac{EF}{BC}=\frac{FO}{BO},\ \frac{CD}{FA}=\frac{DO}{FO}. \qquad (13)$$

Перемножив равенства (13), получим равенство (12).

Утверждение а) теоремы о вписанном шестиугольнике доказано.

б) Пусть теперь шестиугольник *ABCDEF* вписан в окружность и выполняется равенство (12). Докажем, что диагонали *AD, BE, CF* пересекаются в одной точке.

Через точку O пересечения диагоналей AD и BE проведем луч CO. Этот луч пересечет окружность в точке F_1. Тогда по утверждению а) теоремы о вписанном шестиугольнике верно равенство

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF_1}{F_1A}=1. \tag{14}$$

Из равенств (12) и (14) следует, что для точек F и F_1, принадлежащих дуге AE окружности, выполняется равенство $\frac{EF}{FA}=\frac{EF_1}{F_1A}$. Это означает, что точки F и F_1 совпадают (лемма 2), а диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке.

Утверждение б) теоремы о вписанном шестиугольнике доказано.

Задание 28. Докажите, что если противоположные стороны вписанного шестиугольника $ABCDEF$ равны, то его диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке.

Теперь сформулируем утверждение 5 из статьи И.Ф. Шарыгина в виде очередного задания.

Задание 29. Пусть из точки A, взятой вне окружности, проведены две касательные AM и AN к окружности и две секущие, и пусть P и Q — точки пересечения окружности с первой секущей, а точки K и L — со второй. Тогда прямые PK, QL и MN пересекаются в одной точке (рис. 30). Докажите это.

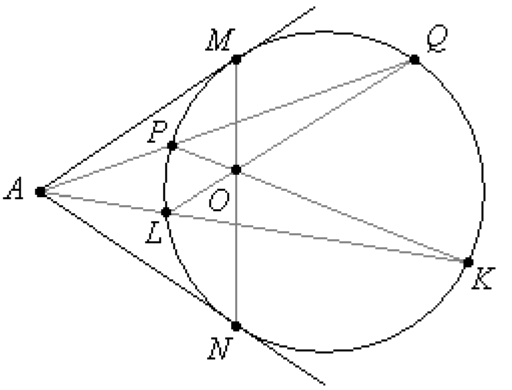


Рис. 30

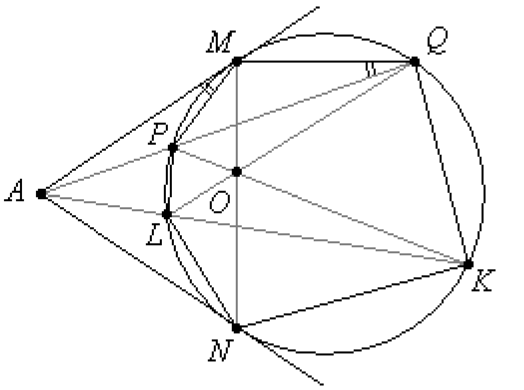


Рис. 31

Доказательство. Рассмотрим шестиугольник $PLNKQM$ (рис. 31). Треугольники APM и AMQ, ALN и ANK подобны по двум углам, следовательно, их стороны пропорциональны:

$$\frac{MP}{QM}=\frac{AM}{AQ},\ \frac{LN}{NK}=\frac{AN}{AK}. \tag{15}$$

Из подобия треугольников AQL и AKP (по двум углам) имеем: $\frac{AQ}{AK}=\frac{AL}{AP}$, или $\frac{AP}{AK}=\frac{AL}{AQ}$. Тогда треугольники APL и AKQ подобны (по двум сторонам и углу между ними), а их стороны пропорциональны:

$$\frac{KQ}{PL}=\frac{AQ}{AL}. \tag{16}$$

Перемножив равенства (15) и (16), получим:

$$\frac{MP}{QM}\cdot\frac{LN}{NK}\cdot\frac{KQ}{PL}=\frac{AM}{AQ}\cdot\frac{AN}{AK}\cdot\frac{AQ}{AL}. \tag{17}$$

Так как касательные AM и AN равны и верно равенство $AM^2=AK\cdot AL$, то из равенства (17) следует, что $\frac{MP}{PL}\cdot\frac{LN}{NK}\cdot\frac{KQ}{QM}=1$. Тогда по теореме о вписанном шестиугольнике диагонали PK, QL и MN пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

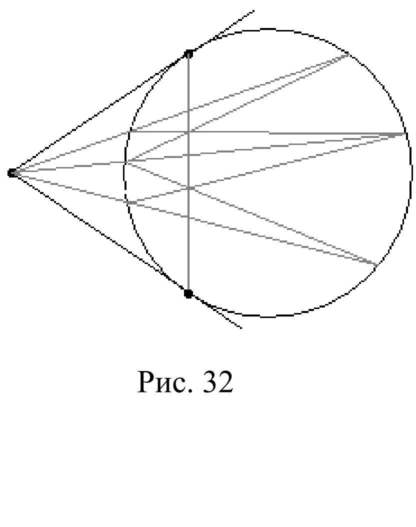


Рис. 32

Из утверждения 5, — писал Игорь Федорович, — следует, что с помощью одной линейки через данную точку вне окружности можно провести касательную. Способ построения показан на рисунке 32.

До сих пор мы доказывали, что прямые пересекаются в одной точке, что три точки лежат на одной прямой и т. п., а утверждение 5 позволяет решить красивую задачу на построение с ограниченными средствами.

Задание 30. На рисунке 32 показано, как с помощью одной линейки через данную точку вне окружности провести касательную. Дайте обоснование этому способу построения.

Выражаю благодарность учителям физматшколы № 2007 г. Москвы П.В. Чулкову, Д.В. Прокопенко, Н.А. Ленской за участие в обсуждении статьи и полезные советы. Особая благодарность за ценные редакционные замечания доценту кафедры прикладной математики Самарского аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева С.В. Дворянинову, а также В.М. Бусеву.

Литература

1. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. — М.: Вита-Пресс, 2005. — 208 с.
2. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Замечательные точки и линии треугольника // Математика. — 2006. — № 17.
3. Мякишев А.Г. Элементы геометрии треугольника. — М.: МЦНМО, 2002. (Библиотека «Математическое просвещение»).
4. Эрдниев П., Манцаев Н. Теоремы Чевы и Менелая // Квант. — 1990 — № 3. — С. 56 – 59.
5. Шарыгин И.Ф. Теоремы Чевы и Менелая // Квант. — 1976. — № 11. — С. 22 – 30.
6. Вавилов В.В. Медианы и средние линии треугольника // Математика. — 2006. — № 1. — С. 11 – 15.
7. Ефремов Дм. Новая геометрия треугольника. Одесса, 1902. — 334 с.