Вокруг заданий 18 из ЕГЭ 2017

А.В. Шевкин,

avshevkin@mail.ru

Аннотация: В статье разобраны различные способы решения ряда заданий с параметром.

Ключевые слова: уравнение, неравенство, параметр, функция, задание с параметром.

Задания с параметрами считаются (и являются) сложными для учителей и учащихся. Попробуем разобраться в них, привести умения, связанные с их решением, в некую систему, которая окажется полезной учащимся. Пойдём от простого — к сложному, от заданий для начинающих к заданиям из сборников для подготовки к ЕГЭ.

Специально придумывать такие задачи не приходится, их много в абитуриентской и ЕГЭ-литературе, а вот способы решения многих задач иногда излишне кратки, а потому не всегда понятны. Постараемся избежать ненужной краткости и непонятности. Начнём с разбора решений более простых заданий, охватывающих разные идеи решений, затем рассмотрим задания из сборников **[1]** – **[3]**. После каждого задания указаны номера сборника и варианта. Например, **[2, 49] —** сборник 2, вариант 49. Без указания таких номеров приведены задачи из других источников.

1. Найдите сумму всех натуральных значений n, при каждом из которых дробь $\frac{2n^2-3n+7}{2n-1}$ является целым числом.

Решение. Разделив числитель дроби на знаменатель уголком или выполнив преобразования: $\frac{2n^2-3n+7}{2n-1} = \frac{2n^2-n-2n+1+6}{2n-1} = \frac{n(2n-1)-(2n-1)+6}{2n-1} = n-1+\frac{6}{2n-1}$, представим данную дробь в виде суммы целого выражения $n-1$, принимающего целые значения при любом натуральном n, и дроби $\frac{6}{2n-1}$. Задача свелась к отысканию всех натуральных значений n, при каждом из которых число $2n-1$ является делителем числа 6. Несложным перебором всех случаев получаем: $n = 1$; 2. При каждом из этих значений n дробь $\frac{2n^2-3n+7}{2n-1}$ является целым числом. Сумма найденных значений n равна 3.

Ответ. 3.

2. Найдите наибольшее целое значение параметра k, при котором решения неравенства

$$\left|\left|\left||31x-147|+157\right|-167\right|+177\right|-187\ \le 93k^4 \qquad (1)$$

удовлетворяют условию $x \in [-190; 200]$.

Решение. Сначала заметим, что в неравенстве (1) можно уменьшить число модулей, так как $|31x-147|+157>0$:

$$\left|\left||31x-147|+157-167\right|+177\right|-187\ \le 93k^4,$$

$$\left|\left||31x-147|-10\right|+177\right|-187\ \le 93k^4.$$

И ещё раз:

$$\left||31x-147|-10\right|+177-187\ \le 93k^4,$$

$$\left||31x-147|-10\right|-10\ \le 93k^4,$$

$$\left||31x-147|-10\right| \le 93k^4+10. \qquad (2)$$

Неравенство (2) равносильно двойным неравенствам:

$$-93k^4-10 \le |31x-147|-10 \le 93k^4+10,$$

$$-93k^4 \le |31x-147| \le 93k^4+20. \qquad (3)$$

Левая часть неравенства (3) выполняется при любых значениях x и k, так как $-93k^4 \le 0$, а $|31x-147| \ge 0$. Поэтому неравенство (3) равносильно двойным неравенствам:

$$-93k^4-20\ \le 31x-147 \le 93k^4+20,$$

$$-93k^4+127\ \le 31x \le 93k^4+167,$$

$$-3k^4+4\frac{3}{31}\ \le x \le 3k^4+5\frac{12}{31}.$$

Условия задачи будут выполнены, если мы найдем наибольшее целое k, для которого справедливы два неравенства:

$$-190 \le -3k^4+4\frac{3}{31}\ \text{ и } 3k^4+5\frac{12}{31}\ \le 200,$$

каждое из которых для целых k равносильно неравенству $k^4 \le 64$.

Наибольшее целое k, для которого справедливо последнее неравенство, есть 2.

Ответ. 2.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + 4x^2 = (3x + 5a)^3 + 6x + 10a \qquad (1)$$

не имеет корней. **[2, 49]**

Решение. Заметим, что в правой части уравнения (1) два раза встречается одно и то же выражение: $(3x + 5a)^3 + 2(3x + 5a)$. Для каждого значения a правую часть уравнения (1) можно рассматривать как значение функции $f(t) = t^3 + 2t$ при $t_1 = 3x + 5a$.

Левую часть можно рассматривать как значение той же функции при $t_2 = 3x^2$.

Функция $f(t)$ является возрастающей на **R**, как сумма возрастающих на **R** функций t^3 и $2t$. Воспользуемся далее известным фактом: возрастающая функция каждое своё значение принимает только один раз. То есть

$$f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2.$$

А так как

$$t_1 = t_2 \Rightarrow f(t_1) = f(t_2),$$

то уравнения $f(t_1) = f(t_2)$ и $t_1 = t_2$ равносильны на **R**.

Это означает, что уравнение (1) равносильно на **R** уравнению:

$$2x^2 = 3x + 5a. \qquad (2)$$

Остаётся найти все значения a, при каждом из которых уравнение $2x^2 – 3x – 5a = 0$ не имеет корней. Вычислив дискриминант квадратного трёхчлена $D = 9 + 40a$, найдём все a, удовлетворяющие условиям задачи: $a < -\frac{9}{40}$.

Ответ. $a < -\frac{9}{40}$.

Кратко этот приём решения описан в книге [4], подробнее — в статье [5].

http://www.shevkin.ru/?action=Page&ID=330

Идея начала решения следующего задания такая же, как в предыдущем задании.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + (a - |x|)^3 + 2x^2 - |x| + a = 0 \qquad (1)$$

имеет более трёх различных решений. **[1, 3]**

Решение. Перепишем уравнение (1) в виде:

$$(2x^2)^3 + 2x^2 = (|x| - a)^3 + (|x| - a). \qquad (2)$$

Левая часть уравнения (2) есть значение функции $f(t) = t^3 + t$ при $t_1 = 2x^2$. Правая — значение той же функции при $t_2 = |x| - a$.

Функция $f(t)$ является возрастающей на **R**, как сумма возрастающих на **R** функций t^3 и t. Следовательно, уравнения $f(t_1) = f(t_2)$ и $t_1 = t_2$ равносильны на **R**.

Это означает, что уравнение (2) равносильно на **R** уравнению:

$$2x^2 = |x| - a. \qquad (3)$$

Остаётся найти все значения a, при каждом из которых уравнение $a = -2x^2 + |x|$ имеет более трёх различных решений.

Построим графики функций $y = -2x^2 + |x|$ и $y = a$.

1) Первая функция чётная, так как $f(-x) = f(x)$ для любого x. Для $x \geq 0$ имеем: $y = -2x^2 + x = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$, график — парабола с вершиной $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{8}\right)$. Для $x \leq 0$ график этой функции симметричен относительно оси Oy построенной части графика (рис. 1)

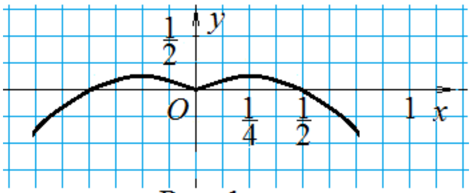

Рис. 1

2) График функции $y = a$ — прямая, параллельная оси Ox.

При $a < 0$ имеется две точки пересечения графиков функций $y = -2x^2 + |x|$ и $y = a$.

При $a = 0$ — три точки пересечения графиков.

При $0 < a < \frac{1}{8}$ имеется четыре точки пересечения графиков.

При $a = \frac{1}{8}$ имеется две точки пересечения графиков.

При $a > \frac{1}{8}$ нет точек пересечения графиков.

Уравнение (2) и равносильное ему уравнение (1) имеют более трёх различных решений, если графики функций имеют более трёх точек пересечения, то есть при $0 < a < \frac{1}{8}$.

Ответ. $0 < a < \frac{1}{8}$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 8|x - 5| + 2\sqrt{x^2 - 10x + 29} = 2a + |x - 2a - 5| \qquad (1)$$

имеет хотя бы один корень. **[1, 4]**

Решение. *I способ.* Перепишем уравнение (1) в виде:

$$a^2 + 8|x - 5| + 2\sqrt{(x-5)^2 + 4} = 2a + |x - 5 - 2a| \qquad (2)$$

1) Если $x - 5 \geq 2a$, то уравнение (2) имеет вид:

$$a^2 + 8|x - 5| + 2\sqrt{(x-5)^2 + 4} = x - 5. \qquad (3)$$

Если уравнение (3) имеет корень x_0, то верно числовое равенство:

$$a^2 + 8|x_0 - 5| + 2\sqrt{(x_0-5)^2 + 4} = x_0 - 5, \qquad (4)$$

левая часть которого не меньше 4. Тогда верно неравенство $x_0 - 5 \geq 4$ и после раскрытия модуля равенство (4) имеет вид:

$$a^2 + 7(x_0 - 5) + 2\sqrt{(x_0-5)^2 + 4} = 0. \qquad (5)$$

Так как левая часть равенства (5) положительна для любых чисел a и x_0, то это равенство неверно, то есть в рассматриваемом случае уравнение (2) не имеет корней.

2) Если $x - 5 < 2a$, то уравнение (2) имеет вид:

$$a^2 + 8|x - 5| + 2\sqrt{(x-5)^2 + 4} = 4a - (x - 5). \qquad (6)$$

Перепишем уравнение (6) в виде:

$$(a - 2)^2 + 8|x - 5| + 2\sqrt{(x-5)^2 + 4} = 4 - (x - 5). \qquad (7)$$

Если уравнение (7) имеет корень x_0, то верно числовое равенство:

$$(a - 2)^2 + 8|x_0 - 5| + 2\sqrt{(x_0-5)^2 + 4} = 4 - (x_0 - 5), \qquad (8)$$

левая часть которого не меньше 4. Тогда верно неравенство $4 - (x_0 - 5) \geq 4$, или $x_0 - 5 \leq 0$. После раскрытия модуля равенство (8) имеет вид:

$$(a-2)^2-7(x_0-5)+2\sqrt{(x_0-5)^2+4}=4. \qquad (9)$$

Так как $(a-2)^2 \geq 0$, $-7(x_0-5) \geq 0$, $2\sqrt{(x_0-5)^2+4} \geq 4$, то равенство (9) возможно лишь при условии, что $x_0 = 5$, $a = 2$.

Проверкой убеждаемся, что при $a = 2$ уравнение (1) действительно имеет единственный корень $x_0 = 5$.

Кратко этот приём решения описан в книге [4], подробнее — в статье [6].

II способ. Найдём все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2-2a+2\sqrt{(x-5)^2+4}+8|x-5|-|x-2a-5|=0, \qquad (10)$$

равносильное уравнению (1), имеет хотя бы один корень.

Для каждого значения a функции $2\sqrt{(x-5)^2+4}$ и $8|x-5|-|x-2a-5|$ возрастают на промежутке $[5; +\infty)$, так как при $x \geq 5$ (при любом раскрытии второго модуля) на каждом участке промежутка $[5; +\infty)$ имеем линейную функции с положительным угловым коэффициентом. Следовательно, для каждого значения a на промежутке $[5; +\infty)$ функция $f(x) = a^2-2a+2\sqrt{(x-5)^2+4}+8|x-5|-|x-2a-5|$ возрастает и достигает наименьшего значения в точке $x = 5$.

Для каждого значения a функции $2\sqrt{(x-5)^2+4}$ и $8|x-5|-|x-2a-5|$ убывают на промежутке $(-\infty; 5]$. Следовательно, для каждого значения a на промежутке $(-\infty; 5]$ функция $f(x)$ убывает и достигает наименьшего значения в точке $x = 5$.

Итак, доказано, что для каждого значения a функция $f(x)$ достигает наименьшего значения в точке $x = 5$.

Уравнение (10) имеет хотя бы один корень при таких значениях a, для каждого из которых значение функции $f(x)$ в точке $x = 5$ неположительно. Осталось решить неравенство $f(5) \leq 0$. Это неравенство имеет вид: $a^2-2a-2|a|+4 \leq 0$. Решим его на промежутках $a \geq 0$ и $a < 0$.

Если $a \geq 0$, то неравенство имеет вид:

$$a^2-4a+4 \leq 0.$$

Оно имеет единственное решение $a = 2$.

Если $a < 0$, то неравенство имеет вид

$a^2 + 4 \leq 0.$

Оно не имеет решений.

Итак, уравнение (1) имеет хотя бы один корень, если $a = 2$.

Ответ. 2.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x+1)|x-2| = a^2 \qquad (1)$$

имеет 3 корня.

Решение. Рассмотрим функции $y = (x+1)|x-2|$ и $y = a^2$. Уравнение (1) имеет 3 корня, если графики этих функций имеют 3 общие точки.

Построим графики функций $y = (x+1)|x-2|$ и $y = a^2$.

1) Для $x \geq 2$ имеем: $y = (x+1)|x-2| = x^2 - x - 2$, график — парабола с вершиной (0,5; –2,25).

2) Для $x < 2$ имеем: $y = (x+1)|x-2| = -(x^2 - x - 2)$, график — парабола с вершиной (0,5; 2,25), симметричная первой параболе относительно оси Ox. На рисунке 2 части парабол, отвечающие ограничениям $x \geq 2$ и $x < 2$ выделены жирной линией. Это и есть график функции $y = (x+1)|x-2|$.

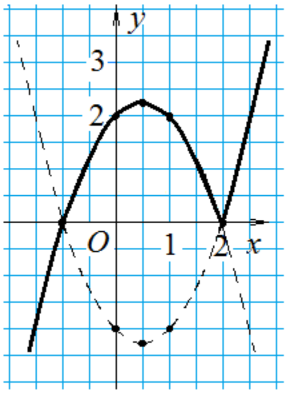

Рис. 2

График функции $y = a^2$ — прямая, параллельная оси Ox. Так как $a^2 \geq 0$, то рассмотрим все возможные случаи:

При $a^2 = 0$ имеется две точки пересечения графиков функций $y = (x+1)|x-2|$ и $y = a^2$.

При $0 < a^2 < 2{,}25$ имеется три точки пересечения графиков функций.

При a^2 = 2,25 имеется две точки пересечения графиков функций.

При a^2 > 2,25 имеется одна точка пересечения графиков функций.

Уравнение (1) имеет 3 корня, если 0 < a^2 < 2,25, 0 < $|a|$ < 1,5.

Ответ. –1,5 < a < 0; 0 < a < 1,5.

7. Найдите сумму всех целых значений параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{ax-8}{x+a} > 0 \qquad (1)$$

выполняется при любых $x \in (-\infty;\ -4) \cup (4;\ +\infty)$.

Решение. Заметим, что $a \neq 0$, так как в противном случае при x = 5 из множества $M = (-\infty;\ -4) \cup (4;\ +\infty)$ неравенство (1) не выполняется. Перепишем неравенство (1) в виде:

$$\frac{a(x-\frac{8}{a})}{x-(-a)} > 0. \qquad (2)$$

Рассмотрим случаи a > 0 и a < 0.

а) Если a > 0, то $-a < \frac{8}{a}$. Решим неравенство (2) методом интервалов (рис. 3). Решения неравенства (2) составляют множество $(-\infty;\ -a) \cup (\frac{8}{a};\ +\infty)$.

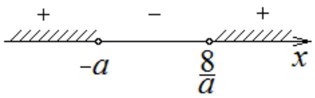

Рис. 3

Любое число из множества M является решением неравенства (2), если число a является решением системы:

$$\begin{cases} a > 0, \\ -a \geq -4, \\ \frac{8}{a} \leq 4. \end{cases} \qquad (3)$$

Все решения системы (3) составляют отрезок [2; 4], сумма целых чисел из этого отрезка равна 9.

б) Если a < 0, то $\frac{8}{a} < -a$. Решим неравенство (2) методом интервалов (рис. 4). Решения неравенства (2) составляют множество $(\frac{8}{a}; -a)$.

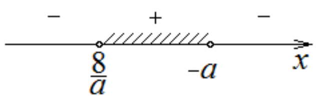

Рис. 4

Для любого значения $a < 0$ в множестве M найдётся число, большее $-a$, которое не является решением неравенства (3), следовательно, любое $a < 0$ не удовлетворяет условиям задачи.

Итак, сумма целых значений параметра a, удовлетворяющих условиям задачи, равна 9.

Ответ. 9.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + ax^2 + 3x - 2 = 0 \qquad (1)$$

не имеет ни одного корня на интервале (0; 2). **[1, 28]**

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x^3 + 3x - 2 = -ax^2. \qquad (2)$$

Функция $f(x) = x^3 + 3x - 2$ возрастает, как сумма возрастающих функций x^3 и $3x - 2$. Поэтому наибольшее значение функции на отрезке [0; 2] равно $f(2) = 12$, а наименьшее — $f(0) = -2$. График функции $y = f(x)$ изображён на рисунке 5.

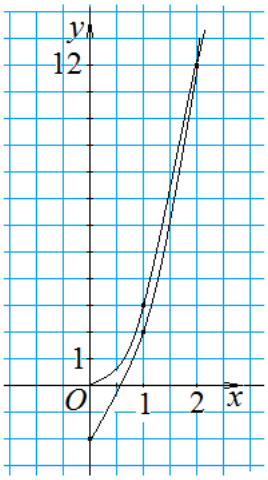

Рис. 5

Рассмотрим квадратичную функцию $h(x) = -ax^2$ (точнее говоря, семейство функций).

Если $-a < 0$ (то есть, a — **положительное** число), то на отрезке [0; 2] функция $h(x)$ убывает, $h(2) = -4a < 0 < 12$. Следовательно, при таких значениях параметра кубическая и квадратичная параболы пересекаются, и уравнение **имеет** корни.

Очевидно, что есть корни и при $a = 0$.

Итак, значения параметра, которые удовлетворяют требованию задачи, следует искать среди отрицательных чисел a в интервале $(-\infty; 0)$. При таких a на отрезке [0; 2] квадратичная функция $h(x) = -ax^2$ возрастает.

Если абсолютная величина a мала, (например, a = –0,01), то дуга квадратичной параболы близка к оси абсцисс, и корни у уравнения есть.

Будем следить за концевой точкой квадратичной параболы — точкой $K(2; -4a)$.

Пока точка K лежит ниже точки (2; 12), две параболы пересекаются, корни есть. Так будет, пока $-4a < 12$, то есть при $a > -3$.

Следовательно, ответ следует искать на “меньшем” множестве $(-\infty;\ -3]$.

При $a = -3$ две параболы — кубическая $f(x) = x^3 + 3x - 2$ и квадратичная $h(x) = -ax^2$ — пересекаются в точке (2; 12). А есть ли у них другие точки пересечения на интервале $0 < x < 2$?

Для ответа на этот вопрос решаем уравнение

$$x^3 + 3x - 2 = 3x^2, \quad \text{или} \quad x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Один корень $x = 2$ мы знаем, это позволяет разложить левую часть уравнения на множители: $(x - 2)(x^2 - x + 1) = 0$.

Очевидно, что $x = 2$ – единственный корень уравнения. Отсюда следует важный вывод: при $a = -3$ на интервале $0 < x < 2$ квадратичная парабола $h(x) = 3x^2$ лежит выше кубической параболы и уравнение в этом интервале не имеет корней (рис. 5).

Если же $-a > 3$, то в интервале $0 < x < 2$ справедливо неравенство $-ax^2 > 3x^2$. Это означает, что парабола с таким значением параметра тем более лежит выше кубической параболы и, соответственно, уравнение корней не имеет.

Уравнение (1) не имеет ни одного корня на интервале (0; 2) для a таких, что $a \le -3$.

Ответ. $a \le -3$.

9. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-2a+3)^2+(y-a)^2=2{,}25, \\ (x+3)^2+(y-a)^2=a^2+2a+1 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение. **[2, 1]**

Решение. Для каждого положительного a уравнения системы задают две окружности: m с центром $(2a-3;\ a)$ и концами горизонтального диаметра $A\,(2a-4{,}5;\ a)$ и $B\,(2a-1{,}5;\ a)$ и n с центром $(-3;\ a)$ и концами горизонтального диаметра $C\,(-a-4;\ a)$ и $D\,(a-2;\ a)$ (рис. 6).

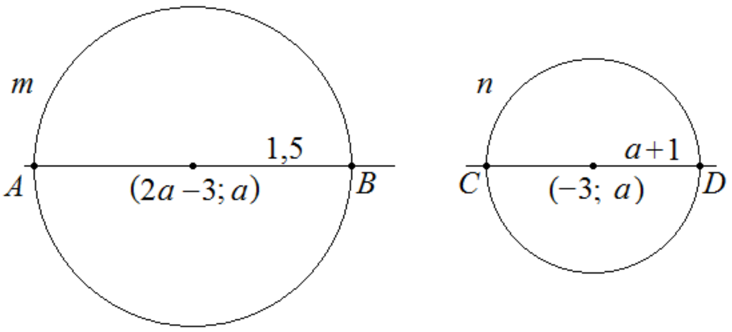

Рис. 6

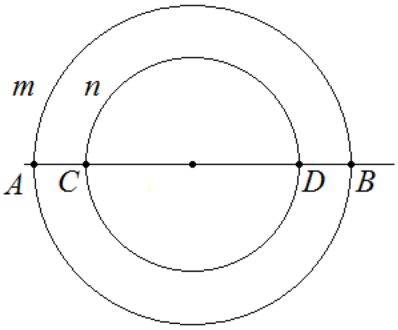

Рис. 7

При $a=0$ окружности m и n имеют общий центр $(-3;\ 0)$ и радиусы 1,5 и 1 соответственно (рис. 7). При увеличении a окружность m перемещается вправо, не меняя радиуса, а окружность n лишь увеличивает радиус. Центры окружностей и точки A, B, C, D лежат на одной прямой, параллельной оси Ox, поэтому окружности имеют единственную общую точку лишь в одном из двух случаев: при совпадении точек A и C или точек A и D, то есть если

$$2a-4{,}5=-a-4 \text{ или } 2a-4{,}5=a-2.$$

Решив полученные уравнения относительно a, получим их корни $a=\frac{1}{6}$ и $a=2{,}5$ соответственно.

Система (1) имеет единственное решение, если окружности m и n имеют единственную общую точку, то есть лишь при $a=\frac{1}{6}$ и $a=2{,}5$.

Ответ. $a=\frac{1}{6}$, $a=2{,}5$.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{-7-8x-x^2}, \\ y - ax = 3 - a \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение. **[3, 16]**

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{-7-8x-x^2}$. Она определена и неотрицательна на отрезке [–7; –1]. Её график — половина окружности (рис. 8). В этом можно убедиться, возведя в квадрат первое уравнение системы и переписав полученный результат в виде $(x+4)^2 + y^2 = 9$, $-7 \le x \le -1$, $y \ge 0$.

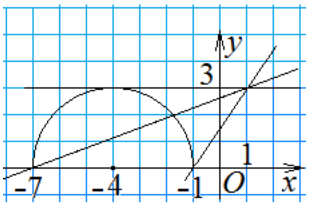

Рис. 8

Рассмотрим функцию $y = a(x-1) + 3$. Её графиком является прямая, проходящая через точку (1; 3) и не параллельная оси Oy. Для трёх значений $a = 0$, $a = \frac{3}{8}$ и $a = \frac{3}{2}$ прямые показаны на рисунке 4. Они проходят через точку (1; 3) и точки (–4; 3), (–7; 0) и (–1; 0) соответственно.

Система (1) имеет единственное решение, если графики функций $y = \sqrt{-7-8x-x^2}$ и $y = a(x-1) + 3$ имеют единственную общую точку. Это возможно лишь при условии $a = 0$ или $\frac{3}{8} < a \le \frac{3}{2}$.

Ответ. $a = 0$, $\frac{3}{8} < a \le \frac{3}{2}$.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2-7xy-7y+49}{\sqrt{x+7}} = 0, \\ y = qx \end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно два решения. **[3, 4]**

Решение. Система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} (xy-7)(y-7) = 0, \\ x > -7, \\ y = qx. \end{cases} \qquad (2)$$

Изобразим в системе координат xOy точки, координаты которых удовлетворяют двум первым условиям системы (2). Получим часть гиперболы $y = \frac{7}{x}$ и часть прямой $y = 7$ для $x > -7$ (рис. 9).

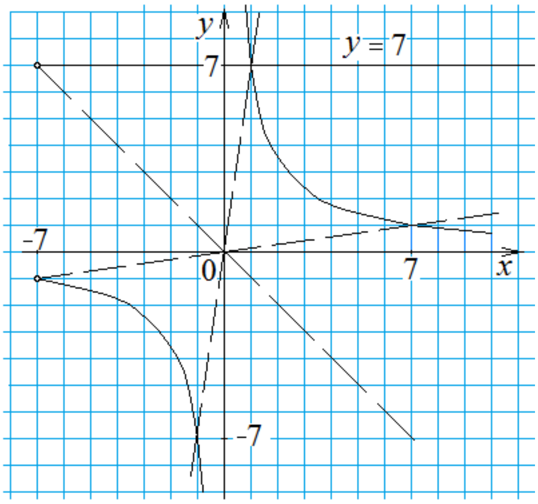

Рис. 9

Прямая $y = qx$ не пересекает построенные графики, если $-1 \le q \le 0$.

Прямая $y = qx$ пересекает построенные графики:

в одной точке, если $q < -1$,

в двух точках, если $0 < q \le \frac{1}{7}$ и $q = 7$,

в трёх точках, если $\frac{1}{7} < q < 7$ и $q > 7$.

Система (1) имеет ровно два решения, если прямая $y = qx$ пересекает построенные графики ровно в двух точках, то есть лишь для $0 < q \le \frac{1}{7}$ и $q = 7$.

Ответ. $0 < q \le \frac{1}{7}$, $q = 7$.

12. Найдите все a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{a - 4\sin^4 x} = \cos^2 x \qquad (1)$$

имеет решение. **[1, 1]**

Решение. Выполнив замену неизвестного $t = \cos^2 x$, $0 \le t \le 1$, перепишем уравнение (1) в виде

$$\sqrt{a - 4(1-t)^2} = t. \qquad (2)$$

Для каждого t такого, что $0 \le t \le 1$, уравнение (2) равносильно уравнению

$$a - 4(1-t)^2 = t^2,$$

$$5t^2 - 8t + 4 - a = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (1) имеет решение, если уравнение (3) имеет корни t, принадлежащие промежутку $0 \le t \le 1$, то есть если

$$0 \le \frac{4+\sqrt{5a-4}}{5} \le 1 \text{ или } 0 \le \frac{4-\sqrt{5a-4}}{5} \le 1.$$

Объединив решения этих иррациональных неравенств, получим, что $\frac{4}{5} \le a \le 4$. Следовательно, уравнение (1) имеет решения для каждого a такого, что $\frac{4}{5} \le a \le 4$.

Ответ. $\frac{4}{5} \le a \le 4$.

Замечание. Упростить решение можно, выразив a через t из равенства (3), построив график функции $a = 5t^2 - 8t + 4$ (рис. 10) и определив множество значений этой функции на отрезке [0; 1]. Получится тот же ответ.

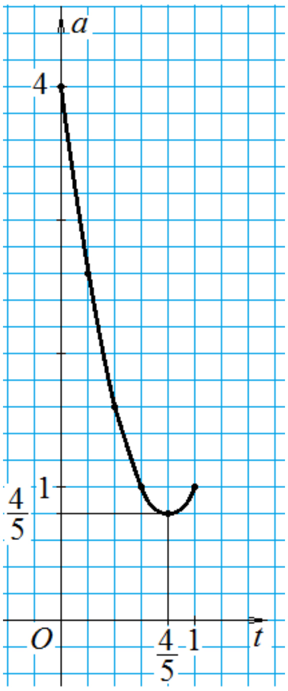

Рис.10

13. Найдите все a, при каждом из которых неравенство

$$\left|\frac{x^2 + x - 2a}{x+a} - 1\right| \le 2 \qquad (1)$$

не имеет решений на интервале (1; 2). **[2, 50]**

Решение. Перепишем неравенство (1) в виде:

$$\left|\frac{x^2 - 3a}{x + a}\right| \le 2. \qquad (2)$$

Заметим, что для некоторых пар чисел $(x;\ a)$ неравенство (2) выполняется со знаком «=», для некоторых — со знаком «<», а для остальных — не выполняется. Решим неравенство (2) на множестве пар чисел $(x;\ a)$, таких, что $1 < x < 2$.

Рассмотрим сначала пары чисел $(x;\ a)$, для каждой из которых верно равенство $\left|\frac{x^2 - 3a}{x + a}\right| = 2$, то есть верно хотя бы одно из условий: $x^2 - 2x - 5a = 0,\ a \ne -x$, или $x^2 + 2x - a = 0,\ a \ne -x$. Эти пары чисел удовлетворяют одной из систем:

$$\begin{cases} a \ne -x \\ a = \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a \ne -x \\ a = x^2 + 2x. \end{cases}$$

В системе координат xOa на интервале $(1;\ 2)$ построим графики функций $a = \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x$ и $a = x^2 + 2x$ (рис. 11).

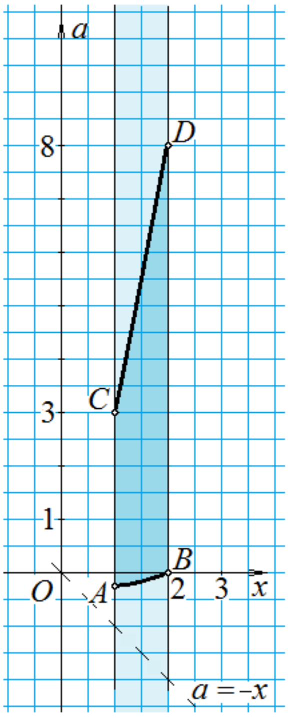

Рис. 11

Парабола $a = \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x$ имеет вершину $A\,(1;\ -\frac{1}{5})$ и проходит через точку $B\,(2;\ 0)$. Парабола $a = x^2 + 2x$ проходит через точки $C\,(1;\ 3)$ и $D\,(2;\ 8)$.

Внутри полосы $1 < x < 2$:

1) равенство $\left|\frac{x^2 - 3a}{x + a}\right| = 2$ выполняется для всех пар чисел $(x;\ a)$, изображаемых точками парабол; эти пары — решения неравенства (2);

2) неравенство $\left|\frac{x^2-3a}{x+a}\right| < 2$ выполняется для всех пар чисел (x; a), изображаемых точками, лежащими между параболами (тёмная часть полосы); эти пары — решения неравенства (2);

3) неравенство $\left|\frac{x^2-3a}{x+a}\right| > 2$ выполняется для всех пар чисел (x; a), изображаемых точками, лежащими ниже первой параболы, но не на прямой $a = -x$, и выше второй параболы (две светлые части полосы); эти пары — не являются решениями неравенства (2).

Таким образом, решениями неравенства (2) являются все пары (x; a), изображенные на интервале (1; 2) точками парабол и точками темной части полосы между параболами.

Требуется найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство (1) не имеет решений на интервале (1; 2). Так как для каждого $-\frac{1}{5} < a < 8$ найдётся хотя бы одно решение x из интервала (1; 2), все значения a, для каждого из которых для любого x из интервала (1; 2) неравенство (1) не имеет решений, составляют множество $(-\infty;\ -\frac{1}{5}] \cup [8;\ +\infty)$.

Ответ. $(-\infty;\ -\frac{1}{5}] \cup [8;\ +\infty)$.

14. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение

$$|3\cos^2 x + a + 4| + |3\cos^2 x - 2a - 5| = 2 - a \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение. **[1, 29]**

Решение. Левая часть уравнения (1) неотрицательна, следовательно, $a \leq 2$. Сделав замену неизвестного $t = 3\cos^2 x + 4$, $4 \leq t \leq 7$, перепишем уравнение (1) в виде

$$|t - (-a)| + |t - (2a + 9)| = 2 - a. \qquad (2)$$

Остаётся найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение (2) имеет хотя бы одно решение t из множества M = [4; 7].

1) Если $-a = 2a + 9$, т. е. если $a = -3$, то уравнение (2) имеет вид:

$$2|t - 3| = 5.$$

Это уравнение имеет корень 5,5, принадлежащий множеству M, следовательно, $a = -3$ удовлетворяет условиям задачи.

2) Если $2a + 9 < -a$, т. е. если $a < -3$, то возможны три случая: $t < 2a + 9$, $2a + 9 \le t < -a$, $t \ge -a$ (рис. 12).

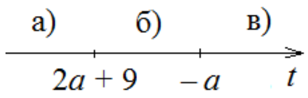

Рис. 12

а) Если $t < 2a + 9$, то $t < 3$, так как $a < -3$. Следовательно, в случае а) уравнение (2) не имеет корней в множестве M.

б) Если $2a + 9 \le t < -a$, то уравнение (2) имеет вид:

$$0t - 2a = 11.$$

Оно имеет корни лишь при $a = -\frac{11}{2}$ (неравенство $a < -3$ выполнено). Эти корни удовлетворяют неравенству $2a + 9 \le t < -a$ при $-2 \le t < \frac{11}{2}$, т. е. при $a = -\frac{11}{2}$ в множестве M найдётся хотя бы один корень уравнения (2). Следовательно, $a = -\frac{11}{2}$ удовлетворяет условиям задачи.

в) Если при $t \ge -a$ уравнение (2) имеет вид:

$$t + a + t - 2a - 9 = 2 - a. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет единственный корень $t = \frac{11}{2}$, принадлежащий M. Неравенство $t \ge -a$ выполняется при всех $a \ge -\frac{11}{2}$. Следовательно, при всех $-\frac{11}{2} \le a < -3$ уравнение (2) имеет хотя бы один корень в множестве M.

В случае 2) условию задачи удовлетворяют все a такие, что $-\frac{11}{2} \le a < -3$.

3) Если $-a < 2a + 9$, т. е. если $a > -3$, то возможны три случая: а) $t < -a$, б) $-a \le t < 2a + 9$, в) $t \ge 2a + 9$ (рис. 13).

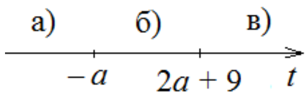

Рис. 13

а) Если $t < -a$, то $t < 3$, так как $a > -3$. Следовательно, в случае а) уравнение (2) не имеет корней в множестве M.

б) Если $-a \le t < 2a + 9$, то уравнение (2) имеет вид:

$$0t + 4a = -7.$$

Оно имеет корни лишь при $a = -\frac{7}{4}$ (неравенство $a > -3$ выполнено). Эти корни удовлетворяют неравенству $-a \le t < 2a + 9$ при $\frac{7}{4} \le t < \frac{11}{2}$, т. е. при $a = -\frac{7}{4}$ в множестве M найдётся хотя бы один корень уравнения (2). Следовательно, $a = -\frac{7}{4}$ удовлетворяет условиям задачи.

в) Если $t \ge 2a + 9$, то уравнение (2) имеет вид (3) и имеет тот же единственный корень $t = \frac{11}{2}$. Неравенство $t \ge 2a + 9$ выполняется при всех a таких, что $-3 < a \le -\frac{7}{4}$.

В случае 3) условию задачи удовлетворяют все a такие, что $-3 < a \le -\frac{7}{4}$.

Объединяя все значения a, удовлетворяющие условиям задачи в случаях 1), 2), 3), имеем: уравнение (1) имеет хотя бы одно решение при всех $-\frac{11}{2} \le a \le -\frac{7}{4}$ (условие $a \le 2$ выполнено).

Ответ. $-\frac{11}{2} \le a \le -\frac{7}{4}$.

15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2|xy - 3y - 4x + 12| = a^2 + 2a - z - 30, \\ 3a^2 - a - z - 32 = 0, \\ z - x^2 - y^2 + 6x + 8y = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно 4 решения. **[1, 30]**

Решение. Прежде всего заметим, что при любом значении параметра a значение z определяется единственным образом:

$$z = 3a^2 - a - 32.$$

Следовательно, остаётся найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2|xy - 3y - 4x + 12| = -2a^2 + 3a + 2, \\ x^2 - 6x + y^2 - 8y = 3a^2 - a - 32 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения $(x; y)$.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 2|(x - 3)(y - 4)| = -2a^2 + 3a + 2, \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 3a^2 - a - 7. \end{cases}$$

Так как левые части уравнений системы неотрицательны, то для параметра a справедливы два неравенства $-2a^2 + 3a + 2 \geq 0$ и $3a^2 - a - 7 \geq 0$.

Решив систему этих неравенств, получим, что

$$\frac{1+\sqrt{85}}{6} \leq a \leq 2. \qquad (2)$$

Сделав замену, $u = x - 3$, $v = y - 4$, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 2|uv| = -2a^2 + 3a + 2, \\ u^2 + v^2 = 3a^2 - a - 7. \end{cases} \qquad (3)$$

Теперь осталось найти все значения параметра a, при каждом из которых система (3) имеет ровно 4 решения (u; v).

При $u = 0$ или $v = 0$ параметр a принимает значения 2 или –0,5, из которых лишь $a = 2$ удовлетворяет двойному неравенству (2).

При $a = 2$ система (3) имеет вид

$$\begin{cases} uv = 0, \\ u^2 + v^2 = 3. \end{cases} \qquad (4)$$

Система (4) имеет ровно 4 решения: (0; $\sqrt{3}$), (0; –$\sqrt{3}$), ($\sqrt{3}$; 0), (–$\sqrt{3}$; 0). Следовательно, $a = 2$ удовлетворяет условиям задачи.

Пусть теперь $u \neq 0$ и $v \neq 0$. Тогда при каждом значении параметра a первое уравнение системы (3) задаёт пару гипербол $v = \pm \frac{-2a^2+3a+2}{2u}$, а второе уравнение — окружность. Система (3) будет иметь ровно 4 решения (u; v), если две гиперболы касаются окружности в четырёх точках (u; u), (u; –u), (–u; u), (–u; –u). В каждом из этих случаев система имеет вид:

$$\begin{cases} 2u^2 = -2a^2 + 3a + 2, \\ 2u^2 = 3a^2 - a - 7. \end{cases}$$

Это возможно лишь при условии $-2a^2 + 3a + 2 = 3a^2 - a - 7$, то есть при $a = -1$ или $a = 1{,}8$. Для $a = 1{,}8$ условие (2) выполняется, а для $a = -1$ — нет.

Следовательно, $a = 1{,}8$ также удовлетворяет условиям задачи.

Итак, существует два значения $a = 1{,}8$ и $a = 2$, для каждого из которых система (1) имеет ровно 4 решения.

Ответ. 1,8; 2.

Литература

1. ЕГЭ-2017 : Математика : 30 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену : профильный уровень / под. ред. И.В. Ященко. М.: АСТ, 2017. – 135 с.

2. ЕГЭ-2017 : Математика. Профильный уровень. 50 вариантов типовых тестовых заданий / под. ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 247 с.

3. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года / под. редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. Ростов-на-Дону: ООО «Легион», 2016. – 376 с.

4. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 11 класс : пособие для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / М.К. Потапов, А.В. Шевкин. — 8-е изд. — М.: Просвещение, 2014. – с. 189. — (МГУ – школе)..

5. Потапов М.К. Шевкин А.В. О решении уравнений вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$. М.: Математика в школе, 2003. – № 8. – С. 40-43.

6. Потапов М.К. Шевкин А.В. Рассуждения с числовыми значениями. М.: Математика в школе, 2005. - № 3. С. 24-29.