Аликвотные дроби

Аликвотной называют дробь с числителем 1, знаменатель которой натуральное число, большее 1. Примеры аликвотных дробей: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

Рассмотрим преобразования, позволяющие представить данную аликвотную дробь в виде суммы двух аликвотных дробей.

Π_1: $\frac{1}{a} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}$;

Π_2: $\frac{1}{a} = \frac{1(a+1)}{a(a+1)} = \frac{a}{a(a+1)} + \frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$;

Π_3: $\frac{1}{ab} = \frac{1(a+1)}{ab(a+1)} = \frac{a}{ab(a+1)} + \frac{1}{ab(a+1)} = \frac{1}{b(a+1)} + \frac{1}{ab(a+1)}$.

Поменяв местами a и b получим вариант преобразования Π_3:

Π_4: $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{ab(b+1)}$.

Π_5: $\frac{1}{ab} = \frac{a+b}{ab(a+b)} = \frac{a}{ab(a+b)} + \frac{b}{ab(a+b)} = \frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{a(a+b)}$.

Рассмотрим преобразования, позволяющие представить данную аликвотную дробь в виде суммы трёх аликвотных дробей.

Π_6: $\frac{1}{a} = \frac{1}{3a} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{3a}$;

Π_7: $\frac{1}{a} = \frac{1(2a+1)}{a(2a+1)} = \frac{a}{a(2a+1)} + \frac{a}{a(2a+1)} + \frac{1}{a(2a+1)} = \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{a(2a+1)}$;

Π_8: $\frac{1}{ab} = \frac{1(a+b+1)}{ab(a+b+1)} = \frac{a}{ab(a+b+1)} + \frac{b}{ab(a+b+1)} + \frac{1}{ab(a+b+1)} =$

$= \frac{1}{a(a+b+1)} + \frac{1}{a(a+b+1)} + \frac{1}{ab(a+b+1)}$.

Π_9: $\frac{1}{abc} = \frac{1(a+b+c)}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{bc(a+b+c)} + \frac{1}{ac(a+b+c)} + \frac{1}{ab(a+b+c)}$.

Замечания. 1. Преобразования Π_1 – Π_3 можно получить из преобразования Π_4, а преобразования Π_6 – Π_8 — из преобразования Π_9.

2. Первоначальный текст раздела «Аликвотные дроби» был опубликован на сайте www.shevkin.ru с пропуском преобразования Π_5, что было замечено внимательным читателем, приславшим не вытекающий из опубликованной «теории» пример: $\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$. Пришлось добавить потерянное преобразование Π_5 и полученные с его помощью новые ответы в следующих задачах.

1. Найдите все натуральные числа a и b, такие, что:

а) $\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; б) $\frac{1}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; в) $\frac{1}{6} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. [*]

Решение. а) Преобразуем различными способами дробь $\frac{1}{2}$:

Π_1: $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$; Π_2: $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

б) Преобразуем различными способами дробь $\frac{1}{3}$:

Π_1: $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$; Π_2: $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.

в) Преобразуем различными способами дробь $\frac{1}{6}$:

$П_1$: $\frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$; $П_2$: $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$;
$П_3$: $\frac{1}{6} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$; $П_3$: $\frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24}$;
$П_5$: $\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$.

Ответ. а) {3, 6}; {4, 4}; б) {4, 12}; {6, 6}; в) {7, 42}; {8, 24}; {9, 18}; {10, 15}; {12, 12}.

2. Найдите все возможные наборы чисел a, b и c, среди которых есть равные и верно равенство:

а) $\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; б) $\frac{1}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. [*]

Ответ. а) {3, 12, 12}; {4, 8, 8}; {5, 5, 10}; {6, 6, 6}; б) {4, 24, 24}; {5, 15, 15}; {6, 12, 12}; {7, 7, 21}; {9, 9, 9}.

3. Четыре натуральных числа a, b, c и d таковы, что

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}. \qquad (1)$$

а) Могут ли все эти числа быть попарно различны?

б) Может ли одно из этих чисел равняться 7?

в) Найдите все возможные наборы таких чисел, среди которых есть равные. [1-6]

Решение. а), б) Так как $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$, то ответ на вопросы *а* и *б*: да.

в) Используя результаты предыдущих заданий, выпишем все возможные наборы чисел a, b и c, среди которых есть равные и верно равенство (1):

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$;
$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$;
$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$;
$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$;
$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$;
$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$;
$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$;
$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.

Ответ. а) Да; б) да; в) {2, 3, 12, 12}; {2, 4, 8, 8}; {2, 5, 5, 10}; {2, 6, 6, 6}; {3, 3, 4, 12}[1]; {3, 3, 6, 6}; {3, 4, 4, 6}; {4, 4, 4, 4}.

[1] Эта четвёрка чисел, потеряна в ответе в сборнике **ЕГЭ-2017** : Математика : 30 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену : профильный уровень / под ред. И.В. Ященко. М.: АСТ, 2017. – 135 с.