Задачи 19 из ЕГЭ. Задачи про турниры

Начнём с подготовительных задач.

1. В турнире по шахматам каждый участник сыграл с остальными по две партии. За выигрыш в партии присуждали 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. Три лучших игрока набрали вместе 24 очка, что составило половину от числа очков остальных участников вместе взятых. Сколько было участников турнира? [*][1]

Решение. Пусть участников турнира x человек, x — натуральное число, они сыграли $\frac{x\cdot(x-1)\cdot 2}{2} = x^2 - x$ партий и набрали $x^2 - x$ очков. Всего очков было $24 + 24\cdot 2 = 72$. Решив уравнение $x^2 - x = 72$, получим два корня $x_1 = 9$ и $x_2 = -8$. Так как x — натуральное число, то $x = 9$.

Ответ. 9 участников.

2. Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. Кто выиграл больше очков: мальчики у девочек или девочки у мальчиков, и на сколько? [*]

Решение. Участников турнира было $6 + 4 = 10$. Они сыграли $\frac{10\cdot 9}{2} =$ $= 45$ партий и набрали $45\cdot 2 = 90$ (очков) независимо от исходов отдельных партий. По условию задачи девочки набрали 40 очков, тогда мальчики набрали $90 - 40 = 50$ очков. Чтобы ответить на вопрос задачи, рассмотрим «турнир в турнире» — игры девочек между собой. В них сыграно $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ партий и набрано $6\cdot 2 = 12$ (очков). Остальные $40 - 12 = 28$ очков девочки выиграли у мальчиков.

Аналогично мальчики в играх между собой набрали 30 очков, значит, мальчики выиграли у девочек $50 - 30 = 20$ очков. Итак, девочки выиграли у мальчиков на $28 - 20 = 8$ очков больше, чем мальчики у девочек.

Ответ. Девочки выиграли у мальчиков на 8 очков больше.

3. В шахматном турнире участвовали учащиеся 10 класса и два ученика 9 класса. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Два девятиклассника набрали вместе 7 очков, а все десятиклассники набрали очков поровну. Сколько десятиклассников участвовало в турнире? [*]

Решение. Пусть из 10 класса в турнире участвовало x человек, x — натуральное число, тогда всех участников было $(x + 2)$ человека и они набрали вместе $(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$ (очков). Тогда десятиклассники

---

[1] Звёздочкой помечены задачи, составленные в дополнение к сборнику [1], они нужны, чтобы лучше освоиться сюжетом задачи.

набрали на 7 очков меньше: $x^2 + 3x - 5$ очков. Так как они набрали очков поровну, то многочлен $x^2 + 3x - 5$ делится на x, т. е. количество очков, набранных каждым учащимся 10 класса, равно $x+3-\frac{5}{x}$ и является натуральным числом. Это возможно лишь при $x = 1$ или при $x = 5$. В первом случае число очков каждого десятиклассника отрицательное, что не отвечает условию задачи. Следовательно, в турнире участвовало 5 десятиклассников.

Ответ. 5 десятиклассников.

4. Несколько учащихся 9 «а» и 9 «б» классов организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Учащиеся 9 «а» класса набрали вместе 26 очков, а учащиеся 9 «б» класса, которых было на 3 больше, набрали очков поровну. Сколько было участников турнира? [*]

Решение. Пусть в турнире участвовало: из 9 «а» класса x человек, из 9 «б» класса $(x + 3)$ человек, x — натуральное число, тогда всех участников было $(2x + 3)$ человека и они набрали вместе $(2x + 3)(2x + 2) = 4x^2 + 10x + 6$ очков. Учащиеся 9 «а» класса набрали 26 очков, учащиеся 9 «б» класса $4x^2 + 10x - 20$ очков. Так как они набрали очков поровну, то многочлен $4x^2 + 10x - 20$ делится на $x + 3$, т. е. количество очков, набранных каждым учащимся 9 «б» класса, равно $4x-2-\frac{14}{x+3}$ и является натуральным числом. Это возможно лишь при $x = 4$ или $x = 11$.

Второй случай не удовлетворяет условиям задачи, так как только в играх друг с другом 11 учащихся 9 «а» класса наберут 110 очков, что больше 26. Следовательно, участников турнира было $2 \cdot 4 + 3 = 11$.

Ответ. 11 участников.

5. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчиков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки? [1-6][2]

Решение. Если n человек проводят турнир и каждый играет с каждым одну партию, то будет сыграно $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ партий. В данной задаче каждый

[2] Задача из сборника [1], вариант 6.

играет с каждым по 2 партии, поэтому будет сыграно $n(n-1)$ партий, а так как в каждой партии разыгрывается одно очко, то будет получено $n(n-1)$ очков.

а) Три девочки провели между собою $3 \cdot 2 = 6$ партий и набрали 6 очков. Если бы они выиграли все $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$ партий у мальчиков, то набрали бы ещё 30 очков. Тогда наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, равно $6 + 30 = 36$.

б) Все 9 участников сыграют $9 \cdot 8 = 72$ партии и наберут 72 очка.

в) Пусть в турнире играли 1 девочка и 9 мальчиков. В лучшем случае девочка выиграет все $9 \cdot 2 = 18$ партий у мальчиков и наберёт 18 очков. Мальчики в играх между собою сыграют $9 \cdot 8 = 72$ партии и наберут 72 очка — ровно в 4 раза больше, чем сумма очков девочки, что соответствует условиям задачи. Это означает, что в турнире могла играть одна девочка. Выясним, могло ли девочек быть больше.

Пусть теперь будет 2 девочки и 18 мальчиков. В лучшем случае девочки выиграют все $2 \cdot 18 \cdot 2 = 72$ партии у мальчиков и наберут 72 очка. Да ещё в 2-х играх между собою девочки наберут 2 очка. Всего девочки наберут $72 + 2 = 74$ очка. Мальчики в играх между собою сыграют $18 \cdot 17 = 306$ партий и наберут 306 очков, $306 : 74 > 4$, что не соответствует условиям задачи. Это означает, что в турнире не могли играть две девочки.

Дальше с увеличением числа девочек отношение числа очков, набранных мальчиками, к числу очков, набранных девочками, будет увеличиваться. Докажем это.

Пусть в турнире играли n девочек и $9n$ мальчиков. В лучшем случае девочки выиграют все $n \cdot 9n \cdot 2 = 18n^2$ партий у мальчиков и наберут $18n^2$ очков. Да ещё в $n \cdot (n-1) = n^2 - n$ партиях между собою девочки наберут $n^2 - n$ очков. Всего они наберут $18n^2 + n^2 - n = 19n^2 - n$ очков. В этом случае мальчики в играх между собою сыграют $9n \cdot (9n-1) =$ $= 81n^2 - 9n$ партий и наберут $81n^2 - 9n$ очков. Так как при любом $n \geq 2$ $\frac{81n^2-9n}{19n^2-n} = \frac{81n-9}{19n-1} = \frac{4(19n-1)}{19n-1} + \frac{5n-5}{19n-1} = 4 + \frac{5n-5}{19n-1} > 4$, то в турнире не могли играть больше одной девочки.

Следовательно, могла быть только 1 девочка.

Ответ. а) 36; б) 72; в) 1.

9.6. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие три мальчиков и две девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников десять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 7 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в три раза больше очков, чем девочки? [2-44]

Ответ. а) 14; б) 90; в) 1.

Литература

1. ЕГЭ-2017 : Математика. Профильный уровень. 50 вариантов типовых тестовых заданий / под ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 247 с.