Задача с одним целочисленным параметром

А.В. Шевкин,
avshevkin@mail.ru

Рассмотрим задачу с одним параметром, принимающим целые значения. Она из сборника популярных авторов И.Н. Сергеева и В.С. Панферова[1].

1. Найдите все целые a, при каждом из которых графики функций

$$y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x - 2a) \text{ и } y = \log_2(x - 2a^3 - 3a^2) \quad (1)$$

пересекаются в точке с целочисленными координатами.

Решение. Сначала отметим, что если для некоторого значения параметра a графики функций (1) пересекаются, то их точка пересечения единственная, так как для этого значения a первая из функций (1) убывающая, а вторая возрастающая.

График функции $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x - 2a)$ можно получить переносом графика функции $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x$ на $|2a|$ единиц вправо или влево — в зависимости от знака числа $2a$, а график функции $y = \log_2(x - (2a^3 + 3a^2)$ можно получить переносом графика функции $y = \log_2 x$ на $|2a^3 + 3a^2|$ единиц вправо или влево — в зависимости от знака числа $2a^3 + 3a^2$ При этом возможны три случая:

1) $2a = 2a^3 + 3a^2$; 2) $2a > 2a^3 + 3a^2$ 3) $2a < 2a^3 + 3a^2$.

1) Если $2a = 2a^3 + 3a^2$ то существуют только два целых значения a, при это равенство верно $a = 0$, $a = –2$, третий корень уравнения не целый.

Если $a = 0$, то уравнение

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = \log_2 x$$

имеет очевидный корень $x = 1$ — целое число (и он единственный в силу сделанного выше замечания). Следовательно, $a = 0$ удовлетворяет условиям задачи.

Если $a = –2$, то уравнение

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x + 4) = \log_2(x + 4)$$

имеет очевидный корень $x = –3$ — целое число (он единственный). Следовательно, $a = –2$ удовлетворяет условиям задачи. Для краткости обозначим $b = 2a^3 + 3a^2$.

2) и 3) Если $2a > b$ или $2a < b$, то графики функций (1) выглядят, как на рисунках 1 и 2 соответственно. Вертикальные асимптоты графиков $x = 2a$ и $x = b$ изображены пунктирной линией. В каждом из этих случаев абсцисса точки пересечения графиков лежит внутри интервала длины 1, следовательно, она является дробным числом.

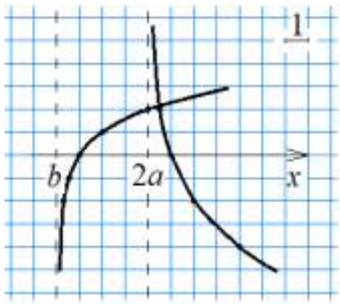

Рис. 1

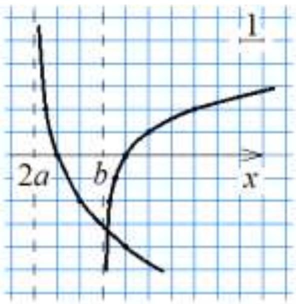

Рис. 2

Таким образом, в случаях 2) и 3) не существует целых значений a, удовлетворяющих условиям задачи.

Ответ. $a = 0$, $a = –2$.

[1] ЕГЭ. Практикум по математике: подготовка к выполнению части С / И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. — М.: Издательство «Экзамен», 2012. — 126 [2] с. (Серия «ЕГЭ. Практикум»).