Олимпиадная задача на площади

Рассмотрим олимпиадную задачу (текст приведён по памяти).

1. В остроугольном треугольнике ABC точки M, N, K — середины сторон AB, BC и AC треугольника соответственно. Из точки M провели перпендикуляры к сторонам BC и AC, из точки N — к сторонам AB и AC, из точки K — к сторонам AB и BC. Внутри треугольника образовался шестиугольник (рис. 1). Определите, какую часть площади треугольника составляет площадь этого шестиугольника.

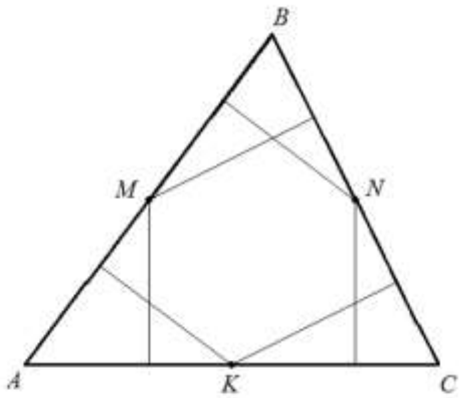

Рис. 1

Пусть S — площадь треугольника ABC, S_0 — площадь шестиугольника, образованного построенными перпендикулярами.

Проведём средние линии в треугольнике ABC. Тогда данный треугольник разобьётся на 4 равных треугольника площади $0{,}25S$, в трёх из них проведены по две высоты — вот он ключ к решению! Мы же знаем, что высоты в равных треугольниках пересекаются в одной точке и соответственные треугольники равны (равные треугольники одинаково закрашены), и имеют равные площади.

Площадь треугольника AMK равна $0{,}25S$, а шестиугольник составлен из треугольника площади $0{,}25S$ и трёх треугольников разных цветов, сумма площадей которых тоже равна $0{,}25S$. Тогда искомая площадь шестиугольника равна $S_0 = 0{,}25S + 0{,}25S = 0{,}5S$.

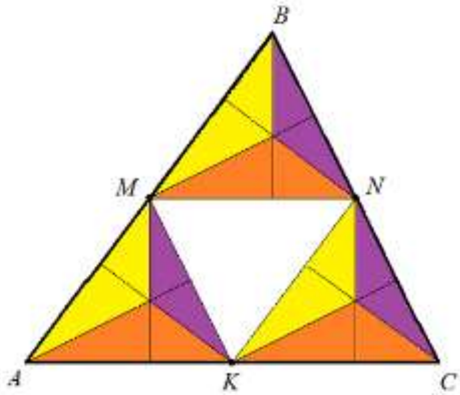

Рис. 2

Итак, площадь шестиугольника равна половине площади данного треугольника.